平成２０年度　岐阜県高等学校教育課程研究集会（数学部会）発表要綱

「２次関数」、「三角比」の指導について

岐阜県立斐太高等学校

１　「２次関数」の授業について

(1) 導入

折り紙で箱の体積を考える問題から入ることにした。

まず箱の体積のグラフから、一般に$y = ax^2 + bx + c$ の形の関数のグラフが放物線になることを予想させ、２次関数の最大値問題を単元の１つの目標として示した。

①最初は、グラフを折れ線にする生徒もいるが、どちらがよいかを問いかけると、ほとんどの生徒は、曲線（放物線）となることを予想する。さらに、x が整数以外の場合を考えて、実際に曲線でなければならないことを確かめさせる。

②xが整数の範囲で最大値を考え、グラフの対称性等からx が実数の範囲における最大値を考えさせる。最大値をとるxの値が整数にならないように問題を与えても面白いと思う。

(2) 関数とブラックボックス

ブラックボックスで、関数のイメージを作る。

関数概念がなぜ近代のヨーロッパでのみ成立したかという話や、機能主義心理学の話などにも触れる。

(3) １次関数と量の対応関係

本校でも「関数は苦手」という生徒は多いので、１次関数を積極的に扱うようにしている。現実に即した問題の中で「ある量xにともなって別の量yが変化する」ときの対応関係を考える。特にこのとき直線の傾きは「yのxに対する変化率」としてその意味を考える。

(4) グラフの合成

$y = ax^2 + bx + c$ の形の２次関数を調べるためには、いきなり平行移動を教師主導で教えるのではなく、

①　$y = ax^2$　→　②　$y = ax^2 + bx$　→　③　$y = ax^2 + bx + c$

の順に進み、それぞれの項ax^2、bx、c　の意味を考える方が自然だと思われる。

(5) 平行移動と平方完成について

$y - q = a(x - p)^2$ の形を、座標軸の平行移動として考え、これとは別に$y = a(x - p)^2 + q$ の頂点が(p,q)となることを、表で確かめてから、この２つの考え方を並行して取り扱うようにした。

(6) ２次関数の最大・最小値と２次不等式

当初の目的であった最大・最小値の問題を、現実的な具体例に即して考えた。

この中で、物体の投げ上げについては、

$$y = v_0 x - \frac{1}{2} g x^2$$

で表されるが、$v_0 x$ の部分が等速直線運動、$-\frac{1}{2} g x^2$ の部分が自由落下を表していて、その合成が放物線になる、という話に興味をもつ生徒がいた。月面での物体の投げ上げなどの話題も取り入れるとよいと思う。

２次不等式についても、x が時刻、y が高さという例で考えて、x と y を量的に区別するようにした。

(7) ２変数関数について

「x, y が $2x + y = 4$ を満たしながら変化するとき、$x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。」という問題と関連して、$z = x^2 + y^2$ について、等高線を記入させ、模型を見せて問題の場面を具体的に示すようにした。

２　ギリシア数学と三角比

(1) 「証明する」ということの意義は

・ギリシアは、ポリス成立当時は、数学に関しては後進国であった。だが、エジプト、バビロニアが 2000 年かけて到達できなかった境地にわずか 300 年程度で駆け上り、追い越した。(エジプトの神官は膨大な数学的知識を蓄えていた。バビロニア人は円周率を５桁まで計算していた。)

・証明とは…

「それまでに知られている事実であっても、ただそのものとして受け入れるのではなく、より基本的な一般原理（アルケー）まで還元し、そこからそれらを導き出す」こと。

・証明によって

①　言葉の使い方がうまくなり、より精密に事柄を表現できるようになった。

②　ものごとが深く理解できる。

③　さらに進んだ事柄へと考えを進められる。

・ タレス、ピタゴラスの業績は、すでに他の文明の中で知られていたことではあったが、それらを初めて「証明しようとした」ということに意義がある。神話（ミュートス）から理性（ロゴス）への転換点

・和算の弱点　…「証明を軽んじた」

ユークリッドの原論を和算家はバカにしていた。

和算は当時の世界の中でも最も優れた計算技術をもっていたが、もし「証明」という概念があれば、さらに進んだ方法を思いついたのではないかと思われる事例がある。

(2) 作図は折り紙を用いる

折り紙では４次方程式まで表現できるので、定規とコンパスより作図の幅が広い（角の３等分、立方体倍積問題なども折り紙で作図可能）

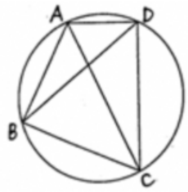
また楽しい上に道具がいらないので簡単に取り組める。

・三角形の五心

重心、外心、垂心を同じ紙で折ると、オイラー線が表れる

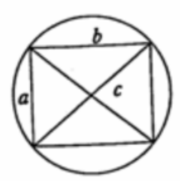
「もし、ユークリッドがオイラーの時代まで生き延びていたなら、なぜこんな単純な事実を見落としたのか悔しがっただろう」（コクセター）

(3) プトレマイオスの定理（トレミーの定理）について



円に内接する四角形において　$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$　が成り立つという定理であるが、数研の教科書では、章末の練習問題として、三角形の相似を用いた証明が載っている。(「反転」を用いた証明が標準的である。)

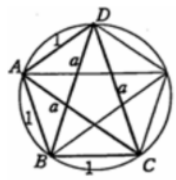
入試問題では円に内接する四角形に関係したテクニックとして利用されることもあるが、この定理からいろいろな関係が導ける。



① ピタゴラスの定理が導ける

長方形は円に内接しているので、図からすぐに導ける。

② 黄金比を出す



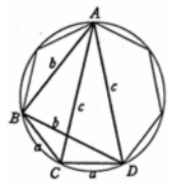
正五角形の一辺の長さを１とし、対角線の長さをａとする

四角形$ABCD$にプトレマイオスの定理を用いて、

$$1 \cdot a + 1 \cdot 1 = a \cdot a$$

$$a^2 - a - 1 = 0 \qquad \therefore \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

③ 正七角形の辺の比



右図の四角形$ABCD$において、

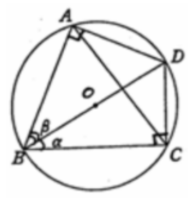
$$ac + ab = bc$$

$$\therefore \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$$

④ 加法定理を導く

右図において正弦定理より、

$$CD = 2R\sin\alpha, AD = 2R\sin\beta, BC = 2R\cos\alpha, AB = 2R\cos\beta, AC = 2R\sin(\alpha+\beta)$$



これにプトレマイオスの定理を用いると、

$$sin(\alpha+\beta) = sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha sin\beta$$ が導ける。

(4) プトレマイオスと三角法

三角比の導入として、

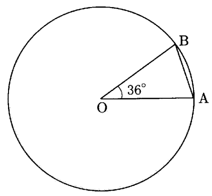
・アリスタルコスによる「太陽と月の大きさ」の比較

・エラトステネスによる「地球の大きさ」の測定

などは、ぜひ扱いたい話題だが、この古代の三角法を完成させたのがプトレマイオスであった。

彼は『アルマゲスト』によって古代天文学（天動説）を完成させ、数学的手段として三角法を用いて「弦の表」を作り上げた。表では、中心角に対する弦の長さを、0.5°刻みで求めている。

例えば、次ページの図の弦ABは、「弦の表」では0.618033988（実際は60進法で表記）となっているが、$2sin18^\circ$の値と小数点以下第五位まで一致している。



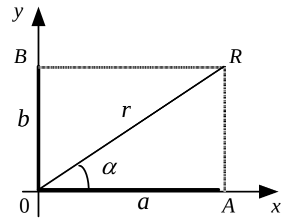
(3)の④で示したように、プトレマイオスの定理は、実質は三角関数の加法定理であり、さまざまな角度に対する弦の長さを求めるために利用された。

(5) 三角関数の合成と加法定理

（三角関数の合成を導くのに加法定理は必要ない）

$$a\sin\theta + b\cos\theta$$

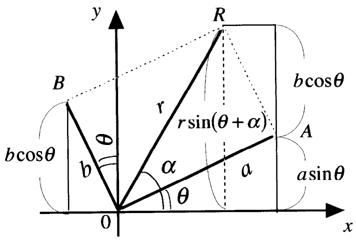
を合成するときに、教科書では、加法定理から導かれ、その際に右図が出てくるが、この図の意味自体が分かりにくい。



図のOAとOBは、それぞれ長さが$a\sin\theta$と$b\cos\theta$の動径を表すと考え、この図の四角形$OARB$をθだけ回転した状態で、ORの高さを考えると、合成の式

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$$

がすぐに導け、はじめの図の意味がよく分かる。



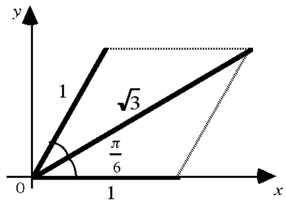
また、この図さえあれば加法定理は必要ない。

もし、数学Bでベクトルが既習であれば、

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OR}$　　として導くこともできる。

図を見比べればわかるように、合成と加法定理とは全く同じものを互いに逆から見ているだけで、例えば「合成と分解」と呼んでもよいものだと思う。

しかし、合成というのは、直感的には「周期が同じ２つの波をたすと、１つの波になる」ということであって、例えば、右図をθ回転した図から、



$$\sin\theta + \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

という変形も可能であり、加法定理より幅が広いので、教える順序としては従来とは逆に、　　　合成　→　加法定理　　　のほうがよいと思う。

合成から加法定理を導くには、単に順序を逆にして、合成の式をrで割り、

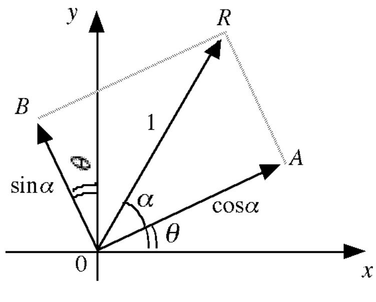
$$\sin(\theta+\alpha) = \frac{a}{r}\sin\theta + \frac{b}{r}\cos\theta$$

において、はじめの図から

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha \quad , \quad \frac{b}{r} = \sin\alpha$$

とすればよい。

合成を使わずに直接加法定理を導くには、例えば、右の図で、



$$\overrightarrow{OA} = (\cos\alpha\cos\theta, \cos\alpha\sin\theta)、\overrightarrow{OB} = (-\sin\alpha\sin\theta, \sin\alpha\cos\theta)$$

$$\overrightarrow{OR} = (\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha))$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OR}$$

より導くことができるが、これは結局合成の図と全く同じものであることがわかる。