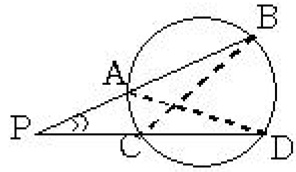
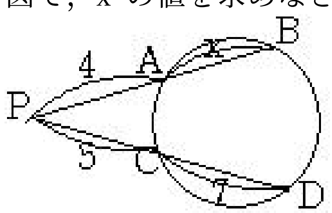
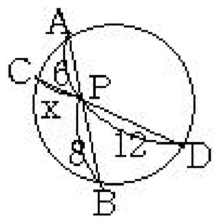
問題番号	問い	右の図のように，点Ｐを通る２直線が，円Ｏと点Ａ，Ｂ及び点Ｃ，Ｄでそれぞれ交わっているとき，ＰＡ・ＰＢ＝ＰＣ・ＰＤが成立つ。 (方べきの定理) このことを，次のように証明した。(　　)に適する記号の組を①～③から選びなさい。  【証明】 △ＰＡＤと(　ア　)において， ∠ＡＰＤ＝∠ＣＰＢ(共通) 弧ＡＣに対する円周角が， 等しいので，∠ＡＤＣ＝(　イ　) だから，△ＰＡＤ∽(　ア　) よって，ＰＡ：(　ウ　)＝ＰＤ：(　エ　) したがって，ＰＡ・(　エ　)＝(　ウ　)・ＰＤ ①　ア △ＰＣＢ　イ ∠ＣＢＡ　ウ ＰＣ　エ ＰＢ ②　ア △ＰＣＢ　イ ∠ＣＢＡ　ウ ＰＢ　エ ＰＣ ③　ア △ＰＣＡ　イ ∠ＰＡＣ　ウ ＰＣ　エ ＰＡ
２２	正解	①

	誤　答　例	つ ま ず き 原因	分析と解消
1	無解答	証明方法を理解していないか，または△ＰＡＤと相似な三角形を見出すことができなかった。	６８ページ 【２２－１】
2	(２)	相似な三角形の対応する辺の比について理解していない。	６９ページ 【２２－２】
3	(３)	△ＰＡＤと相似な三角形を見出すことができなかった。	６８ページ 【２２－１】

正解の解説

△ＰＡＤと△ＰＣＢにおいて，∠ＡＰＤ＝∠ＣＰＢ(共通)
弧ＡＣに対する円周角が等しいので，
∠ＡＤＣ＝∠ＣＢＡ
２組の角がそれぞれ等しいので，
△ＰＡＤ∽△ＰＣＢ
よって，ＰＡ：ＰＣ＝ＰＤ：ＰＢ
したがって，ＰＡ・ＰＢ＝ＰＣ・ＰＤ

練習	次の図で，x の値を求めなさい。 (1)  (2) 
解答	(1)　４×(４＋x)=５×１２ ４＋x=１５　x=１１ (2)　x×１２=６×８ x=４

誤答例1，３のつまずきの分析【２２－1】

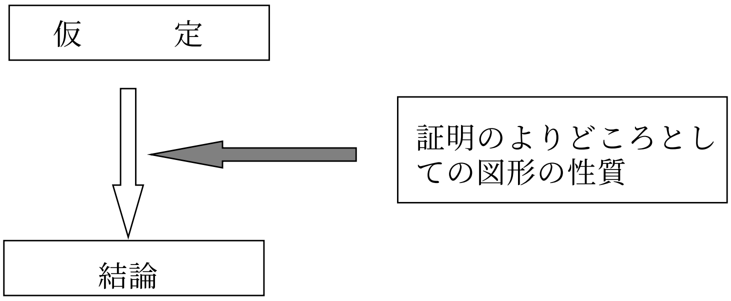
証明方法が理解できていないか，△ＰＡＤと相似な三角形を見出すことができなかったと思われます。

つまずきの解消

○　証明をするときには，結論が成り立つ理由を，仮定から出発して，これまで学んだ図形の性質を用いて，筋道を立てて述べなければなりません。

はじめに，証明すべきことがらの仮定と結論をはっきりさせることが必要です。

【証明のしくみ】



簡単な例にもとづいて，証明のしくみをみてみよう。

【例】

平行四辺形ＡＢＣＤの２組の対角はそれぞれ等しいことを証明しなさい。

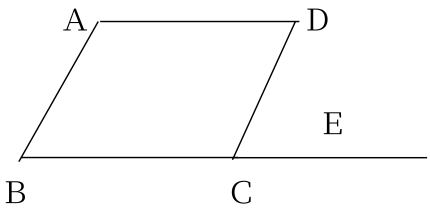
仮定：ＡＢ//ＤＣ，ＡＤ//ＢＣ

結論：∠Ａ=∠Ｃ，∠Ｂ=∠Ｄ

証明のよりどころとしての図形の性質

・平行線の同位角は等しい。

・平行線の錯角は等しい。



【証明】

ＡＢ//ＤＣより，同位角が等しいから，∠Ｂ=∠ＤＣＥ・・・①

ＡＤ//ＢＣより，錯角が等しいから，　∠D=∠ＤＣＥ・・・②

①，②から，∠Ｂ=∠Ｄ

同様にして，∠Ａ=∠Ｃ

この例のように，すでに正しいと認められることがらをよりどころとして，あることがらが成り立つことをすじ道を立てて述べることを証明といいます。

次に，方べきの定理を証明してみよう。

<方べきの定理>

円周上にない点Ｐを通る２つの直線が円とそれぞれ点Ａ，ＢおよびＣ，Ｄで交わっているとき，次のことが成り立つ。

ＰＡ×ＰＢ=ＰＣ×ＰＤ

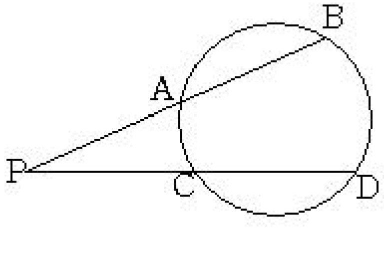


図１

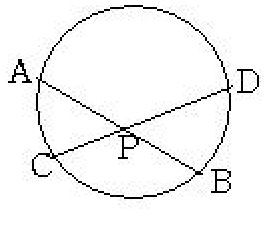
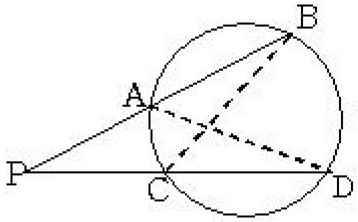


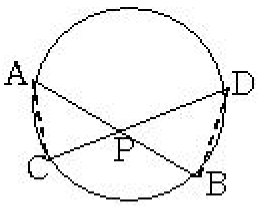
図２

<仮定>
円周上にない点Ｐを通る２つの直線が円Ｄとそれぞれ点Ａ，ＢおよびＣ，Ｄで交わっている。
<結論>
ＰＡ×ＰＢ=ＰＣ×ＰＤ
【証明】
◇　図１の場合の証明



<証明> △ＰＡＤと△ＰＣＢにおいて，
弧ＡＣに対する円周角の大きさは等しいので，
∠ＡＢＣ=∠ＡＤＣ
∠ＡＰＣ=∠ＣＰＡ(共通)
であるから，
で，△ＰＡＤ∽△ＰＣＢ
ＰＡ：ＰＣ＝ＰＤ：ＰＢ
したがって，ＰＡ×ＰＢ＝ＰＣ×ＰＤ

◇　図２の場合の証明

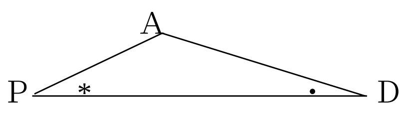


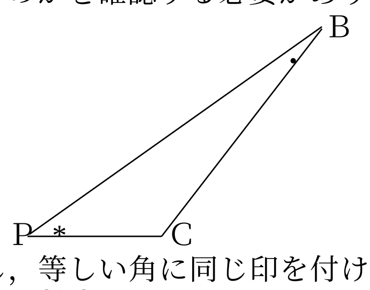
<証明> △ＰＡＣと△ＰＤＢにおいて，
弧ＢＣに対する円周角の大きさは等しいので，
∠ＣＡＢ=∠ＣＤＢ
∠ＡＰＣ=∠ＢＰＤ(対頂角だから)
２組の角がそれぞれ等しいので，
△ＰＡＣ∽△ＰＤＢ
ＰＡ：ＰＤ=ＰＣ：ＰＢ
したがって，ＰＡ×ＰＢ＝ＰＣ×ＰＤ

○　△ＰＡＤと相似な三角形を見出すには，「こうすればできる」という方法はありませんが，まず，<結論>をみると，辺としてＰＢ，ＰＣが入っていることから，△ＰＣＢ，△ＡＣＰ，△ＰＢＤなどが考えられます。さらに，これらの三角形の内角に対して，△ＰＡＤの２つの内角の大きさと等しくなっているかどうかを検討します。もし，ある三角形の２つの内角の大きさが，△ＰＡＤの内角と等しいことが分かれば，これが△ＰＡＤと相似な三角形となります。このように，相似な三角形を見出すには，結論から推測することが１つの方法であると考えられます。

つまずきの分析【２２－２】
△ＰＡＤと相似な三角形を見出すことはできたが，対応する辺の比を式に表現するときに，間違えたと思われます。

つまずきの解消
○　相似な三角形について，対応する辺はどこになるのかを確認する必要があります。





上の図のように，相似な２つの三角形を取り出し，等しい角に同じ印を付け，対応する辺を確認します。ＰＡと対応する辺はＰＣ，ＰＤと対応する辺はＰＢ，ＡＤと対応する辺はＢＣであることがわかります。だから，ＰＡ：ＰＣ=ＰＤ：ＰＢ となります。