問題番号	問い	３辺の長さがＡＢ＝８，ＢＣ＝９，ＣＡ＝４の△ＡＢＣがある。∠Ａの二等分線と辺ＢＣとの交点をＤとするとき, ＢＤの長さを求めなさい。
１５	正解	６

	誤　答　例	つ ま ず き 原　因	分析と解消
1	無解答	角の二等分線と線分の比について理解していない。	３９ページ【１５－１】
2	$\frac{9}{2}$	角の二等分線と中線を混同している。	４１ページ【１５－２】
3	５	目分量による勘で答えている。	４１ページ【１５－３】
4	３	比の計算を間違えている。	４１ページ【１５－４】

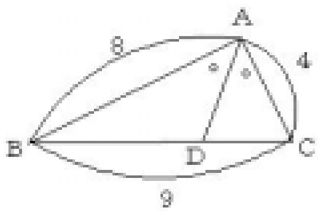
正解の解説

内角Ａの二等分線の性質より，ＢＤ：ＤＣ＝ＡＢ：ＡＣ

＝８：４

＝２：１

よって， $BD=\frac{2}{2+1}BC=\frac{2}{3}\times 9=6$



練習　３辺の長さがＡＢ＝６，ＢＣ＝５，ＣＡ＝４の△ＡＢＣがある。∠Ａの２等分線と辺ＢＣとの交点をＤとするとき，ＢＤの長さを求めよ。

解答　角の二等分線の性質より，ＢＤ：ＤＣ＝ＡＢ：ＡＣ

＝６：４

＝３：２

よって，$BD=\frac{3}{3+2}BC=\frac{3}{5}\times 5=3$

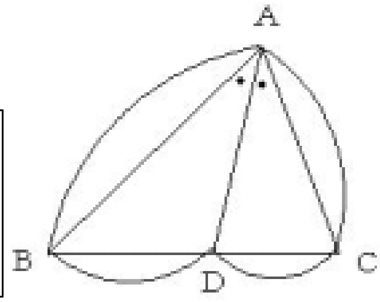
誤答例１のつまずきの分析【１５－１】

角の二等分線と線分の比について理解していないため，無解答であると思われます。

つまずきの解消

角の二等分線の性質について理解する必要があります。

○　角の二等分線については次の性質が成り立ちます。



角の二等分線と線分の比の関係 △ＡＢＣにおいて，∠Ａの二等分線と辺ＢＣとの交点をＤとするとき， ＢＤ：ＤＣ＝ＡＢ：ＡＣ が成り立つ。

証明はあと（４０ページ）ですることにして，問題の条件をこの関係式にあてはめてみましょう。すると，ＢＤ：ＤＣ＝ＡＢ：ＡＣ＝８：４＝２：１となりますから，

ＢＤの長さはＢＣの長さの$\frac{2}{2+1}$倍になります。

したがって，　$BD=\frac{2}{2+1}\times BC=\frac{2}{3}\times 9=6$となります。

○　ＢＤの長さの計算式の説明をします。

下図を見てください。

まず，２：１なので，はじめは線分全体を$\boxed{2}+\boxed{1}=\boxed{3}$と考えてみます。（図１）

次に線分全体を１とみます。（図２）（図１の値を，３で割ればよいのです。）

今，ＢＣの長さは９なので，実際のＢＤの長さは図２の値を９倍すればよいのです。

(図３)（一度，線分全体を１とみておけば，あとは長さをかけるだけです。）

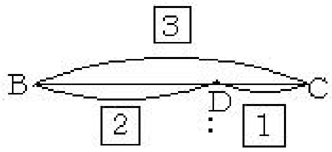


図１

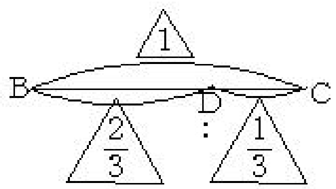


図２

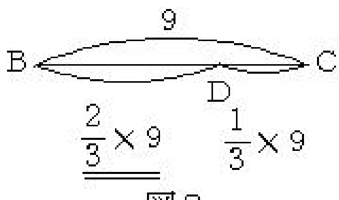
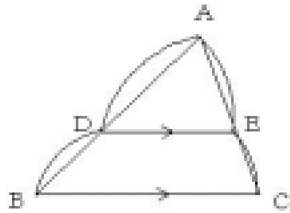


図３

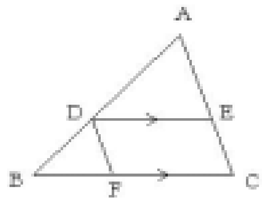
○　この角の二等分線の性質の証明には，中学校で学んだ「三角形と比についての定理」を使いますので，それを次に確認しておきましょう。

三角形と比についての定理

△ＡＢＣで，辺ＡＢ，辺ＡＣ上の点をそれぞれＤ，Ｅとする。
ＤＥ//ＢＣならば，ＡＤ：ＤＢ＝ＡＥ：ＥＣ

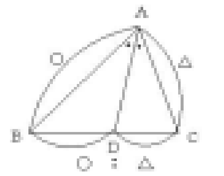


[証明]
辺ＢＣ上に，ＤＦ//ＡＣとなる点Ｆをとる。
△ＡＤＥと△ＤＢＦについて
∠ＡＤＥ＝∠ＤＢＦ　（ＤＥ//ＢＣの同位角）
∠ＤＡＥ＝∠ＢＤＦ　（ＤＦ//ＡＣの同位角）
対応する２角が等しいので，△ＡＤＥ∽△ＤＢＦ
よって，ＡＤ：ＤＢ＝ＡＥ：ＤＦ･･･①
また，四角形ＤＦＣＥは，２組の対辺がそれぞれ平行なので，平行四辺形である。
よって，ＤＦ＝ＥＣ･･･②である
①，②より，ＡＤ：ＤＢ＝ＡＥ：ＥＣが成り立つ。　[証明終]

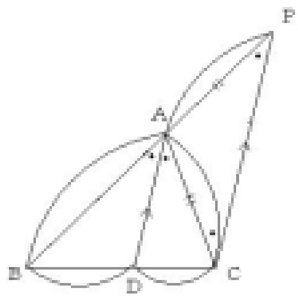


○　それでは，角の二等分線と線分の比の関係を証明してみます。

角の二等分線と線分の比の関係
△ＡＢＣにおいて，
∠Ａの二等分線と辺ＢＣとの交点をＤとするとき，
ＢＤ：ＤＣ＝ＡＢ：ＡＣが成り立つ。



［証明］
点Ｃを通りＡＤに平行な直線を引き，ＢＡの延長との交点をＰとする。（下図）
ＡＤは∠Ａの二等分線であるから，∠ＢＡＤ＝∠ＣＡＤ ……①
ＡＤ//ＰＣの同位角なので，　　∠ＢＰＣ＝∠ＢＡＤ ……②
ＡＤ//ＰＣの錯角なので，　　　∠ＡＣＰ＝∠ＣＡＤ ……③
①，②，③より，∠ＢＰＣ＝∠ＡＣＰ
よって，△ＡＣＰは二等辺三角形である。
したがって，ＡＰ＝ＡＣ　･･･④
ここで，ＡＤ//ＰＣであるから，
「三角形と比についての定理」（上述）より
ＢＤ：ＤＣ＝ＢＡ：ＡＰ　･･･⑤
④，⑤よりＢＤ：ＤＣ＝ＡＢ：ＡＣ
［証明終］



誤答例２のつまずきの分析【１５－２】

角の二等分線と中線を混同しているための誤答であると思われます。

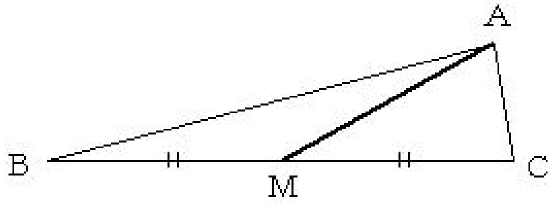
つまずきの解消

角の二等分線と中線は，区別して考えなければいけません。

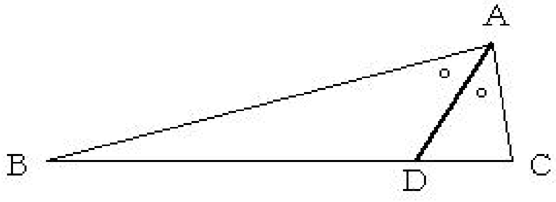
○　点Ａと辺ＢＣの中点を結ぶ中線であれば，点Ｄは中点ですから，ＢＤ＝ $\frac{9}{2}$ となります。一般には角の二等分線は中線とは異なるので誤りです。

下の２つの合同な三角形で，ＡＭが中線，ＡＤが角の二等分線です。明らかに長さは違います。この２つが一致するのはＡＢ＝ＡＣの二等辺三角形のときだけです。

角の二等分線と線分の比の関係について，【１５－１】を学習してください。



中線



角の二等分線

誤答例３のつまずきの分析【１５－３】

３辺の長さに注意して条件を満たす三角形をかき，∠Ａの二等分線を引くと，明らかにＢＤのほうがＤＣよりも長くなります。角の二等分線の性質を使わずに，目分量で，おそらく，ＢＤ＝５，ＤＣ＝４ぐらいだろうと，勘で答えたための誤答と思われます。

つまずきの解消

○　勘は大切な力ですが，それを数学的に裏付ける姿勢が大切です。角の二等分線の性質をよく理解し，しっかり応用できるようにしましょう。

【１５－１】を参照してください。

誤答例３のつまずきの分析【１５－４】

点Ｄは辺ＢＣを２：１の比に内分する点ですが，対応する比を間違えて１：２として計算したための誤答であると思われます。

つまずきの解消

○　図をかけば，ＢＤのほうがＤＣより長いはずなので，間違いに気がつくことができます。図をかいて考える習慣や導き出した解答を図で検証する姿勢を身に付けましょう。

角の二等分線の性質については【１５－１】を学習し，しっかりと理解してください。