問題番号	問い	θが鈍角で，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$のとき，$\cos\theta$と$\tan\theta$の値を求めなさい。
8	正解	$\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $\left(=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

	誤　答　例	つ ま ず き 原 因	分析と解消
1	無解答	相互関係を利用できないか，鈍角の三角比の値の求め方を理解していない。	１８ページ【８－１】
2	$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	θの範囲と三角比の符号の関係を理解していない。	２０ページ【８－２】
3	$\cos\theta=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	θの範囲と三角比の符号の関係を理解していない。	２０ページ【８－２】
4	$\cos\theta=\dfrac{8}{9}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{8}$	$\cos^2\theta$の値をそのまま$\cos\theta$とした。	２０ページ【８－３】
5			

正解の解説

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$より，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1$　よって$\cos^2\theta=\dfrac{8}{9}$

θが鈍角のとき，$\cos\theta<0$より，$\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$より，$\tan\theta=\dfrac{\dfrac{1}{3}}{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

練習	$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$で，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$のとき，$\sin\theta$と$\tan\theta$の値を求めなさい。
解答	$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\tan\theta=\sqrt{15}$

誤答例１のつまずきの分析【８－１】

三角比の１つの値が与えられても，等しいθに対する残りの２つの三角比との関係(相互関係)を理解していないので，与えられた値をどのように扱ってよいのかわからないと考えられます。

つまずきの解消

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$のとき，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$となるθは，θが鋭角($0^\circ<\theta<90^\circ$)なら，図１のような直角三角形が考えらます。この直角三角形の底辺は，三平方の定理より

$2\sqrt{2}$となり(図２)，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　，$\tan\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　となります。

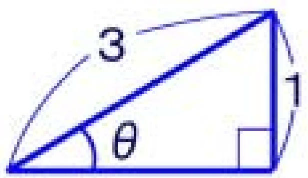

図１

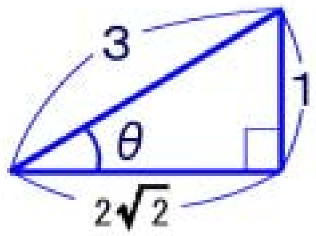

図２

しかし，この問題はθが鈍角($90^\circ<\theta<180^\circ$)なので，図３のように座標で考えて，

$\dfrac{y\text{座標}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}$となるような点Ｐが考えられます。

ここで注意するのは，点Ｐの x 座標が先ほどの底辺の長さ$2\sqrt{2}$ではなく，$-2\sqrt{2}$となることです。

したがって，図４より，$\cos\theta=\dfrac{x\text{座標}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{y\text{座標}}{x\text{座標}}=\dfrac{1}{-2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　となります。

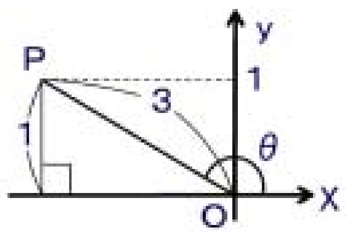

図３

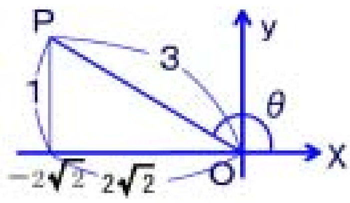

図４

○　２点間の距離と三角比の相互関係

図５において，原点ＯとＰ$(x,\ y)$の距離を r とすると，$x^2+y^2=r^2$ となります。

両辺をr^2 で割って，

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1$$

$$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1$$

よって，三角比の相互関係

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

ができました。

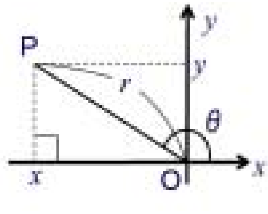

図５

また，

$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ より，

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

さらに，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$の両辺を$\cos^2\theta$で割って，

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

よって，

$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

となります。

○　問題の解説

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$に$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$を代入すると，

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

よって

$\cos^2\theta = \dfrac{8}{9}$，$\cos\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

ここで，θが鈍角のとき，$\cos\theta < 0$なので，

$\cos\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

また，

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

○　$\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ の計算について

分母分子に3をかけて，$\dfrac{\frac{1}{3} \times 3}{-\frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

とするか，

$$\frac{1}{3} \div \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

と，考える。

誤答例２，３のつまずきの分析【８－２】

θの範囲と三角比の符号の関係を理解していないので，プラスの方を採用してしまったと考えられます。

つまずきの解消

鋭角と鈍角では三角比の符号がどうなるかをもう一度，確認してみましょう。

○　sin˘，cos˘の場合

sin˘は単位円上では y 座標ですから，図１のように鋭角でも鈍角でもプラスです。しかし，cos˘は x 座標なので，鋭角ではプラスですが，鈍角ではマイナスになります。

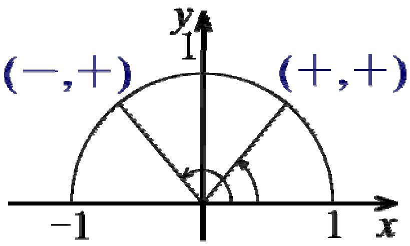

図１

○　tan˘の場合

tan˘は $\frac{y\text{座標}}{x\text{座標}}$ ですから，

鋭角の場合は，$\frac{+}{+}$ なのでプラス，

鈍角の場合は，$\frac{+}{-}$ なのでマイナスになります。

	鋭角	鈍角
sin θ	＋	＋
cos θ	＋	－
tan θ	＋	－

以上をまとめると，右の表のようになります。

誤答例４のつまずきの分析【８－３】

公式の２乗の部分を見落として，そのまま答えとしてしまったと考えられます。

つまずきの解消

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ を利用するときは，２乗が入っていることに注意してください。また，$\cos^2\theta$ の値から $\cos\theta$ を求めるときは，上の【８－２】を参照して，符号に注意してください。