

問題番号	問い	2 次関数 $y = x^2 + 2kx + 5k - 6$ が x 軸と接するように k の値を定めなさい。		
2 0	正解	$k = 2 , 3$		
誤 答 例		つ ま ず き 原 因		分析と解消
1	無解答	k という文字が入り，式が複雑で混乱している。または， x 軸と接するための条件を理解していない。		6 0 ページ 【 2 0 - 1 】
2	$k = - 6 , 1$ または $k = - 2 , - 3$	平方完成か，方程式を解く途中で間違えた。		6 1 ページ 【 2 0 - 2 】
3	$k = \frac{5 \pm \sqrt{31}}{2}$	$b^2 - 4ac$ の計算で間違えた。		6 1 ページ 【 2 0 - 3 】
4	$k = 5 \pm \sqrt{13}$	$b^2 - 4ac$ の計算で間違えた。		6 1 ページ 【 2 0 - 3 】
5	$k = 5 \pm 2\sqrt{7}$	$b^2 - 4ac$ の計算で間違えた。		6 1 ページ 【 2 0 - 3 】
正解の解説 1		正解の解説 2		
$b^2 - 4ac = 0$ となればよいから， $(2k)^2 - 4 \times 1 \times (5k - 6) = 0$ $4k^2 - 20k + 24 = 0$ $k^2 - 5k + 6 = 0$ $(k - 2)(k - 3) = 0$ よって $k = 2 , 3$		$y = (x - k)^2 - k^2 + 5k - 6$ と変形できるので， 頂点の y 座標は $-k^2 + 5k - 6$ となるので これが x 軸上にあればよいから， $-k^2 + 5k - 6 = 0$ $k^2 - 5k + 6 = 0$ $(k - 2)(k - 3) = 0$ ， よって， $k = 2 , 3$		
練習	次の 2 次関数が x 軸と接するように k の値を定めよ。			
	$(1) y = x^2 - kx + 9$ $(2) y = x^2 - 4x + k - 3$ $(3) y = x^2 - 2kx + k + 2$ $(4) y = -x^2 + kx + k - 3$			
解答	$(1) k = \pm 6$ $(2) k = 7$ $(3) k = -1 , 2$ $(4) k = -6 , 2$			

誤答例 1 のつまずきの分析【20 - 1】

x と k の 2 文字が含まれているので式が複雑なため、式自体が理解できない、または、 x 軸と接するための条件を理解していないか、式が複雑なので、接するための条件を公式に当てはめることができないと思われます。

つまずきの解消

- 式の中には x 以外に k という文字が入って複雑になっています。そこで、具体的に k の値をいろいろと変えてグラフをかいてみましょう。

例えば、 $k = 1$ を代入してみると、問題の 2 次関数は $y = x^2 + 2x - 1$ となって、グラフ のように、 x 軸と 2 点で交わっています。

$$k = \frac{5}{2} \text{ のときは, } y = x^2 + 5x + \frac{13}{2} \text{ となり, グ}$$

ラフ のように x 軸と共有点をもちません。

$k = 3$ のときは、 $y = x^2 + 6x + 9$ となり、
グラフ のように x 軸と接することがわかります。

このように k の値をいろいろ変えて x 軸と接する場合を調べることができます。

- これを計算で求めるにはどうしたらよいでしょうか。

【19 - 1】(57 ページ) に詳しく説明してありますが、2 次関数のグラフと x 軸の位置関係は $b^2 - 4ac$ の値によって変わります。この場合は x 軸と接するのでから $b^2 - 4ac$ の値は 0 になればよいのです。

$y = x^2 + 2kx + 5k - 6$ で $b^2 - 4ac$ を考えると、 a は x^2 の係数で 1、 b は x の係数で $2k$ 、 c は定数項で $5k - 6$ となり、

$$b^2 - 4ac = (2k)^2 - 4 \times 1 \times (5k - 6) = 0$$

(注：かっこを付けて計算することを忘れないようにしてください。)

$$4k^2 - 20k + 24 = 0$$

両辺を 4 で割って、 $k^2 - 5k + 6 = 0$ 、因数分解して、 $(k - 2)(k - 3) = 0$ 、

よって、 $k = 2, 3$ を求めることができました。

- この問題をグラフの頂点の y 座標に注目して解いてみましょう。

グラフ のように、頂点が x 軸より下、つまり y 座標がマイナスのときは 2 点で交わり、
のように頂点が x 軸より上、つまり y 座標がプラスのときは共有点が無く、頂点が x 軸上、つまり y 座標が 0 のときは接します。

$y = x^2 + 2kx + 5k - 6$ を変形すると、

$$y = (x + k)^2 - k^2 + 5k - 6$$

となるので、頂点の座標は $(-k, -k^2 + 5k - 6)$ です。

よって、接するためには、 y 座標 = 0、すなわち、 $-k^2 + 5k - 6 = 0$ になります。

両辺に -1 を かけて、 $k^2 - 5k + 6 = 0$ となり、先ほどと同じく $k = 2, 3$ が求まります。

誤答例 2 のつまずきの分析【20 - 2】

$y = x^2 + 2kx + 5k - 6$ を $y = a(x - p)^2 + q$ に変形しようとして、
 $y = (x + k)^2 + k^2 + 5k - 6$ としてしまったか、 $-k^2 + 5k - 6 = 0$ の両辺に -1 をかけるときに、不注意で $k^2 + 5k + 6 = 0$ としてしまったと思われます。

つまずきの解消

- 【9 - 1】(28 ページ) に詳しく説明してありますが、 $y = x^2 + 2kx + 5k - 6$ の平方完成は、

$$y = x^2 + 2kx \quad + 5k - 6$$

$$= \{x^2 + 2kx + k^2\} - k^2 + 5k - 6$$

$$= \{(x + k)^2\} - k^2 + 5k - 6$$

となるので、 k^2 の係数は -1 です。

また、マイナスをかけるときにはすべての項の符号が変わりますから、十分に注意しましょう。

誤答例 3, 4, 5 のつまずきの分析【20 - 3】

$b^2 - 4ac$ に代入するとき括弧を付け忘れたか、付けていても次のような計算をしたと思われます。

$(2k)^2 - 4 \times 1 \times \underline{5k - 6}$ $= 4k^2 - 20k - 6 = 0$ $2k^2 - 10k - 3 = 0$ $k = \frac{5 \pm \sqrt{31}}{2}$	$\underline{2k^2} - 4 \times 1 \times (5k - 6)$ $= 2k^2 - 20k + 24 = 0$ $k^2 - 10k + 12 = 0$ $k = 5 \pm \sqrt{13}$	$\underline{2k^2} - 4 \times 1 \times \underline{5k - 6}$ $= 2k^2 - 20k - 6 = 0$ $k^2 - 10k - 3 = 0$ $k = 5 \pm 2\sqrt{7}$
---	--	--

つまずきの解消

- 今回のように $b = 2k$ となる場合は、 $b^2 = b \times b$ ですから、 $(2k) \times (2k)$ すなわち、 $(2k)^2$ となり、指数法則 $(ab)^n = a^n b^n$ より、 $(2k)^2 = 2^2 k^2 = 4k^2$ となります。
- また、 $c = 5k - 6$ のように定数項が多項式になる場合も、括弧を忘れないようにしましょう。