

問題番号	問い	グラフの頂点の座標が (- 2 , 3) で、点 (0 , - 1) を通る 2 次関数を求めなさい。		
1 5	正解	$y = - x ^ 2 - 4 x - 1$		
誤 答 例		つ ま ず き 原因		分析と解消
1	無解答	2 次関数が、 $y = a (x - p) ^ 2 + q$ の形に、表現できることが理解できていない。 $y = a x ^ 2 + b x + c$ と おいたので、式の処理ができなかった。		4 5 ページ 【 1 5 - 1 】
2	$y = - x ^ 2 + 4 x - 1$ [$y = - (x - 2) ^ 2 + 3$]	求める 2 次関数を $y = a (x - 2) ^ 2 + 3$ と置いた。		4 6 ページ 【 1 5 - 2 】
3	$y = x ^ 2 + 4 x + 7$ [$y = (x + 2) ^ 2 + 3$]	点 (0 , - 1) を通ることについては考えずに、 $y = (x + 2) ^ 2 + 3$ と考えた。		4 6 ページ 【 1 5 - 3 】
4	$y = x ^ 2 - 4 x + 7$ [$y = (x - 2) ^ 2 + 3$]	点 (0 , - 1) を通ることについては考えずに、 $y = (x - 2) ^ 2 + 3$ と考えた。		4 6 ページ 【 1 5 - 2 】 【 1 5 - 3 】
5				

正解の解説

頂点の座標が (- 2 , 3) であることから、この 2 次関数は、
 $y = a (x + 2) ^ 2 + 3$ と表わされる。
 グラフが (0 , - 1) を通ることから
 $- 1 = 4 a + 3$
 ゆえに、 $a = - 1$
 よって、求める 2 次関数は $y = - (x + 2) ^ 2 + 3$ であり、
 $y = - x ^ 2 - 4 x - 1$ となる。

練習	グラフが次の条件を満たす 2 次関数を求めなさい。 (1) 頂点の座標が (- 2 , - 1) で、点 (0 , 7) を通る。 (2) 頂点の座標が (- 1 , 2) で、点 (1 , 6) を通る。		
解答	(1) $y = 2 (x + 2) ^ 2 - 1$ より $y = 2 x ^ 2 + 8 x + 7$ (2) $y = (x + 1) ^ 2 + 2$ より $y = x ^ 2 + 2 x + 3$		

誤答例 1 のつまずきの分析【15 - 1】

2 次関数のグラフの頂点座標が (p, q) で与えられているとき、 x^2 の係数を a とおけば、2 次関数は $y = a(x - p)^2 + q$ と表現できます。このことが理解できていないと考えられます。

また、求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおいて、 $x = -2$ のとき、 $y = 3$ であることから、 $4a - 2b + c = 3 \dots$

$x = 0$ のとき、 $y = -1$ であることから、 $c = -1 \dots$

、を導くことができたが、この 2 つの方程式をもとにして、以降どのように方程式を処理するかが分からなかったと考えられます。

つまずきの解消

- 2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、 $y = ax^2$ のグラフを、点 (p, q) が頂点になるように平行移動した放物線です。

詳細については、【8 - 1】(25 ページ)、【10 - 1】(33 ページ)を参照しましょう。

この問題の場合、原点を頂点とするどのような 2 次関数のグラフを平行移動すると、頂点座標が $(-2, 3)$ で点 $(0, -1)$ を通るようにするとができるのかを考えなければなりません。

求める 2 次関数は $y = a\{x - (-2)\}^2 + 3$ とおくことができます。このグラフが、点 $(0, -1)$ を通ることから、 x に 0、 y に -1 を代入して a の値を求めればよいのです。

すなわち、 $-1 = a(0 + 2)^2 + 3$ から、 $-4 = 4a$ となり、 $a = -1$ となります。

$p = -2$ であることから、 $y = a\{x - (-2)\}^2 + 3 = a(x + 2)^2 + 3$ となることに注意しよう。

2 次関数 $y = a(x + 2)^2 + 3$ のグラフが、点 $(0, -1)$ を通るとは、2 次関数において、 x の値が 0 のとき y の値が -1 となることを意味しています。

だから、 x に 0 を代入すると、 y は -1 になります。

2 次関数 $y = a\{x - (-2)\}^2 + 3$ $\longleftrightarrow$ $y = a(x + 2)^2 + 3$ のグラフ
 $x = 0$ のとき、 $y = -1$ 点 $(0, -1)$ を通る。

< 参考 >

$c = -1$ をへ代入すると、 $4a - 2b = 4 \dots$ となります。

a, b を求めるためには、 a, b に関する方程式をもう 1 つ作らなければならないことがわかります。

そこで、頂点に注目します。2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点の座標が、

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

より、 x 座標が -2 であることから、 $-\frac{b}{2a} = -2$ となります。分母を払うと、

$b = 4a \dots$ となります。

、の連立方程式を解いて、 a, b を求めればよいのです。

をへ代入すると、

$$4a - 2(4a) = 4$$

$$-4a = 4$$

$$a = -1$$

$a = -1$ をへ代入して、 $b = -4$ となります。

よって、求める 2 次関数は、 $y = -x^2 - 4x - 1$ となります。

誤答例 2 のつまずきの分析【15 - 2】

2 次関数 $y = a x^2$ のグラフを、点 (p, q) が頂点になるように平行移動した場合の 2 次関数のグラフの方程式が、 $y = a(x - p)^2 + q$ となることの理解ができていないと考えられます。

つまずきの解消

- つまずきの分析と解消【15 - 1】(45 ページ)を参照してください。

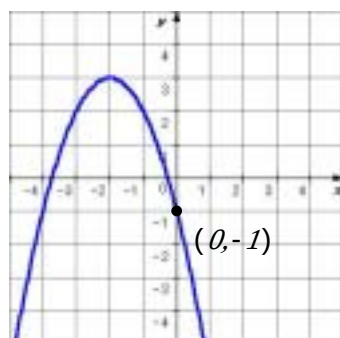
誤答例 3 のつまずきの分析【15 - 3】

2 次関数のグラフの頂点座標が与えられただけでは、2 次関数はただ 1 つには決まりません。 x^2 の係数 a の符号や大きさによって、グラフの形が変化します。このことに気付いていないと思われます。

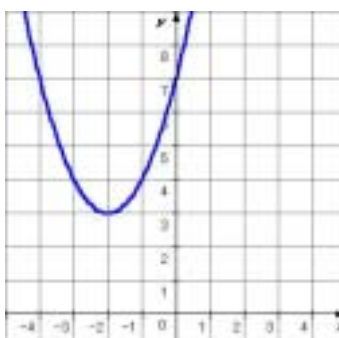
つまずきの解消

- 2 次関数 $y = a(x + 2)^2 + 3$ のグラフは、
 $a > 0$ のとき、下に凸のグラフ
 $a < 0$ のとき、上に凸のグラフ
 a の値の大きさによって、グラフの開き方も違って来る。

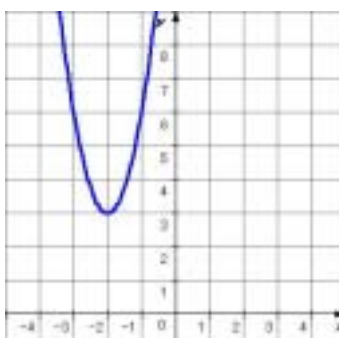
$a = -1$ のとき
 $y = -(x + 2)^2 + 3$



$a = 1$ のとき
 $y = (x + 2)^2 + 3$



$a = 3$ のとき
 $y = 3(x + 2)^2 + 3$



a の値の変化によって、グラフの形が変わります。ちょうど、グラフが点 $(0, -1)$ を通るように、 a の値を決めなければなりません。

だから、求める 2 次関数を $y = a(x + 2)^2 + 3$ とおかなければなりません。

誤答例 4 のつまずきの分析【15 - 4】

2 次関数 $y = a x^2$ のグラフを、点 (p, q) が頂点になるように平行移動した場合の 2 次関数のグラフの方程式が、 $y = a(x - p)^2 + q$ と表わされることや、2 次関数のグラフの頂点座標が与えられただけでは、2 次関数はただ 1 つには決まらないことが理解できていないと考えられます。

つまずきの解消

- つまずきの解消【15 - 1】(45 ページ),【15 - 3】(46 ページ)を参照してください。