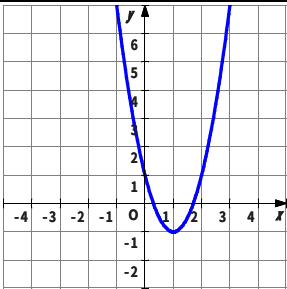
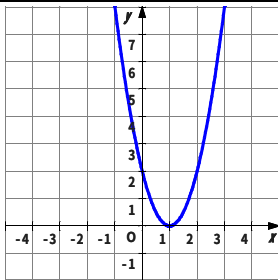
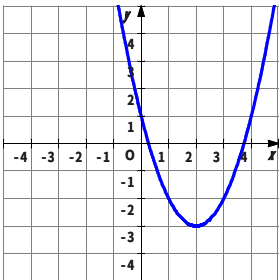
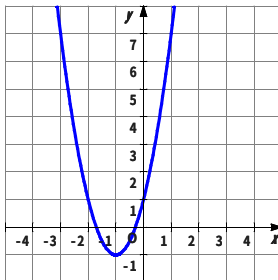


問題番号	問い	2 次関数 $y = 2x^2 - 4x + 1$ のグラフをかきなさい。			
9	正解				
誤 答 例		つまずき原因 分析と解消	誤 答 例	つまずき原因 分析と解消	
1	無解答	2 次関数のグラフのかきかたを理解していない。 28 ページ 【9-1】	3		平方完成させるときに、計算間違いをした。 31 ページ 【9-2】
2		x^2 の係数を 1 として変形した。 31 ページ 【9-2】	4		x の係数を +4 として変形した。 31 ページ 【9-2】
正解の解説 グラフは $y = 2x^2 - 4x + 1$ $\quad\quad = 2(x - 1)^2 - 1$ と変形できるから、頂点は $(1, -1)$ である。 $y = 2x^2$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に -1 平行移動したものである。					
練習	次のグラフの頂点を求めなさい。 (1) $y = 3x^2 + 6x - 1$ (2) $y = -x^2 + 2x$ (3) $y = -2x^2 + x + 1$ (4) $y = 2x^2 + 1$				
解答	(1) $(-1, -4)$ (2) $(1, 1)$ (3) $(\frac{1}{4}, \frac{9}{8})$ (4) $(0, 1)$				

誤答例1のつまずきの分析【9-1】

$y = 2x^2 - 4x + 1$ のグラフをかくことの意味を理解していないため、無解答であると思われます。「関数のグラフ」とはということなのか理解する必要があります。

つまずきの解消

○ 「関数のグラフ」を確認しよう。→【3-1】(8ページ)

○ 2次関数の通る点を調べてみよう。

関数 $y = 2x^2 - 4x + 1$ の x に値を代入して y の値を求めてみます。

x	-4	-3	-2	-1	0	<u>1</u>	2	3
$y = 2x^2 - 4x + 1$	49	31	17	7	1	-1	1	7

表から、 $x = 1$ で、左右対称になっていることが分かるので、 $x = 1$ が軸で、頂点が $(1, -1)$ であることが分かります。

しかし、表を作っても軸や頂点が分かるとはかぎりません。

そこで、 $y = ax^2 + bx + c$ を、今までに習った形 $y = a(x - p)^2 + q$ に式変形する方法を考えてみましょう。

○平方完成について確認しましょう。

展開や因数分解で学んだ等式を活用します。

$$(x + \triangle)^2 = x^2 + 2\triangle x + \triangle^2 \quad (\text{乗法公式})$$

例題1 $x^2 + 4x + \square = (x + \triangle)^2$ となるには、 $\square$ と $\triangle$ を何にすればよいですか。

(解) $(x + \triangle)^2$ を展開すると、 $x^2 + 2\triangle x + \triangle^2$ になるから
 x の係数を比べると、 $4 = 2\triangle$ となり、 $\triangle = \mathbf{2}$ がわかります
定数項を比べると、 $\square = \triangle^2$ となるから、 $\square = 2^2 = \mathbf{4}$ がわかります。

すなわち、 $x^2 + 4x + \mathbf{4} = (x + \mathbf{2})^2$ となります。

~~~~~の部分のポイントです。 $x$  の係数を比べると、 $\triangle$  がすぐにわかります。すなわち、

**$\triangle$  は  $x$  の係数を2で割った値であり、 $\square$  は  $\triangle^2$**

であることがわかります。

このことを利用すると、次の**例題2**はどのようなでしょうか。

**例題 2**  $\chi^2 + 6\chi + \square - \square = (\chi + \triangle)^2 - \square$  となるには、 $\triangle$ と $\square$ を何にすればよいですか。

(解) 両辺に $\square$ をたすと、 $\chi^2 + 6\chi + \square = (\chi + \triangle)^2$  となり、**例題 1**の式と同じです。

例題 1 で「 $\triangle$ は $\chi$ の係数を 2 で割った値であり、 $\square$ は $\triangle^2$ 」であることを確認したので、

$$6 = 2\triangle \text{ となり、 } \triangle = \mathbf{3}$$

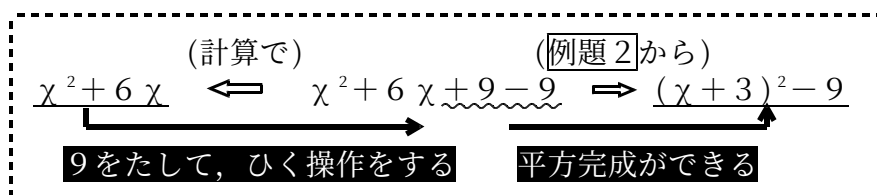
がわかります。そして、

$$\square = \triangle^2 = 3^2 = \mathbf{9}$$

がわかります。

すなわち、 $\chi^2 + \mathbf{6}\chi + \overbrace{9-9}^{\chi^2+6\chi+9-9} = (\chi + \overbrace{3}^{\chi^2+6\chi+9-9})^2 - \mathbf{9}$  と表すことができます。

**例題 2**の結果を言い換えると、



となります。この考え方を平方完成に利用します。

(確認問題) 次の式を  $\chi^2 + a\chi + \square - \square = (\chi + \triangle)^2 - \square$  にするには、 $\triangle$ と $\square$ を何にすればよいですか。

(1)  $\chi^2 - 8\chi + \square - \square = (\chi + \triangle)^2 - \square$

(2)  $\chi^2 + 3\chi + \square - \square = (\chi + \triangle)^2 - \square$

[答え (1) $\triangle$ は $-4$ 、 $\square$ は $16$  (2) $\triangle$ は $\frac{3}{2}$ 、 $\square$ は $\frac{9}{4}$ ]

○それでは、この平方完成を活用して、 $y = 2\chi^2 - 4\chi + 1$ を $y = a(\chi - p)^2 + q$ の形にしてみましょう。

$$\begin{aligned}
 y &= 2\chi^2 - 4\chi + 1 \\
 &= 2(\chi^2 - 2\chi) + 1 \\
 &= 2(\chi^2 - 2\chi + \mathbf{1 - 1}) + 1 \\
 &\quad \text{はじめの3つの項で平方が完成する}
 \end{aligned}$$

- ①

②

③

④

$\chi^2$ の係数で $\chi^2$ と $\chi$ の項をくくる。

(        )内で平方完成させるために $+\square - \square$ を付ける。  
 $\left[ \begin{array}{l} 2\triangle = -2 \text{ から } \triangle = -1 \text{ となり、} \\ \square = \triangle^2 = 1 \text{ がわかるから} \end{array} \right]$   
**1をたして、ひく**  
**<なぜ、たして、ひくのか>**  
 式変形なので、計算すれば元の式と一致しなければならないからです。

括弧内のはじめの3つの項で $(\chi + \triangle)^2$ を作る。

分配法則で展開する。

$$= 2\{(\chi - 1)^2 - 1\} + 1$$

$$= 2(\chi - 1)^2 - 2 + 1$$

$$= 2(\chi - 1)^2 - 1$$

このように変形できると、頂点の座標が(1, -1)であることがわかります。また、 $y = 2x^2$ のグラフをx軸方向に1, y軸方向に-1平行移動したグラフであることもわかります。

(参考)「 $(x + \Delta)^2 = x^2 + 2\Delta x + \Delta^2$  (乗法公式)」を変形すると、次の関係が成り立つことがわかります。

$$x^2 + 2\Delta x = (x + \Delta)^2 - \Delta^2$$

この関係から、次のように変形することもできます。

$$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - (-1)^2 \quad [2\Delta = -2 \text{ より, } \Delta = -1]$$

### < $y = ax^2 + bx + c$ を $y = a(x - p)^2 + q$ に変形する >

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \end{aligned}$$

$$= a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right\} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

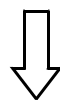
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$



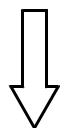
①  $x^2$ の係数で $x^2$ と $x$ の項をくくる。



② 括弧内で平方完成させるために、 $+\square - \square$  (または $+\Delta^2 - \Delta^2$ ) を付ける。



③ 括弧内のはじめの3つの項で $(x + \Delta)^2$ を作る。



④ 分配法則で展開する。

以上のことから、 $y = ax^2 + bx + c$  のグラフのかき方は、次のようにまとめることができます。

#### **$y = ax^2 + bx + c$ のグラフのかき方**

1.  $a$  の符号によって、**上に凸か、下に凸か**を調べる。

2.  $y = a(x - p)^2 + q$  の形に変形して、軸と頂点を求める。

①  $x^2$ の係数で $x^2$ と $x$ の項をくくる。

② 括弧内で平方完成させるために、 $+\square - \square$ を付ける。

③ 括弧内のはじめの3つの項で $(x + \Delta)^2$ を作る。

④ 分配法則で展開する。

→ **軸  $x = p$  頂点  $(p, q)$**

## 誤答例 2, 3, 4 のつまずきの分析【9-2】

方針はわかっていると思われますが、式変形の仕方が間違っていると考えられます。

### つまずきの解消

○【9-1】で示した変形をもう一度確認しましょう。

$$\begin{aligned} y &= 2\chi^2 - 4\chi + 1 \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ &= 2(\chi^2 - 2\chi) + 1 \\ &= 2(\chi^2 - 2\chi + 1 - 1) + 1 \\ &\quad \quad \quad \downarrow \\ &= 2\{(\chi - 1)^2 - 1\} + 1 \\ &\quad \quad \quad \downarrow \\ &= 2(\chi - 1)^2 - 2 + 1 \\ &= 2(\chi - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

○ミスの例

- ・  $\chi^2$  の係数を付け忘れた。
- ・ くくるとき、 $\chi$  の係数を間違えた。
- ・ 定数項を付け忘れた。
- ・ 符号を逆にした。
- ・ 加えるだけで引かなかった。
- ・ 展開のとき、 $\chi^2$  の係数をかけ忘れた。

### 【ミスなくす方法】

正しく変形できたかを確認するには、展開してみましょう。展開した結果が元の式になれば大丈夫です。

(確認問題) 次の二次関数のグラフの頂点を求めなさい。

(1)  $y = \chi^2 + 4\chi + 1$                       (2)  $y = -\chi^2 - 2\chi + 2$

(3)  $y = 2\chi^2 - 3\chi + 1$                       (4)  $y = -2\chi^2 + 1$

[答え (1)  $(-2, -3)$     (2)  $(-1, 3)$     (3)  $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$     (4)  $(0, 1)$ ]