問題番号	問い	２次不等式　$\chi^2-4\chi+5>0$　を解きなさい。
１９	正解	すべての実数

誤　答　例		つ　ま　ず　き　原　因	分析と解消
1	無解答	２次不等式を解く意味を理解していない。	５０ページ【１９－１】
2	$\chi<-1$，$5<\chi$	誤った因数分解を行ってしまった。	２１ページ【８－１】
3	解なし	２次方程式としてみた場合の「解なし」をそのまま適用した。	５１ページ【１９－２】
4			

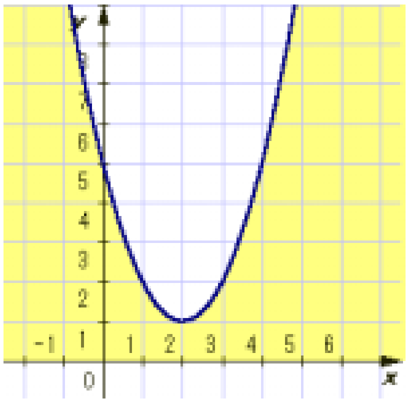
正解の解説１

　$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなして描いてみると

　$y=(\chi-2)^2+1$

と変形できるので，右のような頂点が$(2,\ 1)$の下に凸の放物線のグラフとなる。

　よって，$\chi^2-4\chi+5>0$の解は，<u>すべての実数</u>である。



正解の解説２

　方程式とみなして，判別式をとると

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0$となり，

解がないことがわかる。

　これは　$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなしたグラフが，χ軸と共有点をもたないことと同じである。χ^2の係数>0なので，グラフは下に凸。

よって，$\chi^2-4\chi+5>0$の解は，<u>すべての実数</u>である。

正解の解説３

　$\chi^2-4\chi+5$　は　$(\chi-2)^2+1$と変形できる。

すべての実数χについて，$(\chi-2)^2\geqq0$，これに$+1$をしているので，

　$(\chi-2)^2+1>0$

よって，$\chi^2-4\chi+5>0$の解は，<u>すべての実数</u>である。

練習	次の２次不等式を解きなさい。 (1)　$\chi^2-4\chi+7>0$ (2)　$\chi^2-2\chi+3>0$ (3)　$2\chi^2-4\chi+5>0$
解答	(1)　すべての実数 (2)　すべての実数 (3)　すべての実数

誤答例１のつまずきの分析【１９－１】

２次関数のグラフを描くことができないと思われます。２次関数のグラフを描けるようになることが，２次不等式を確実に解けるようになる近道です。特に頂点の座標を求めることと，グラフが上に凸か下に凸かの判断することが重要です。

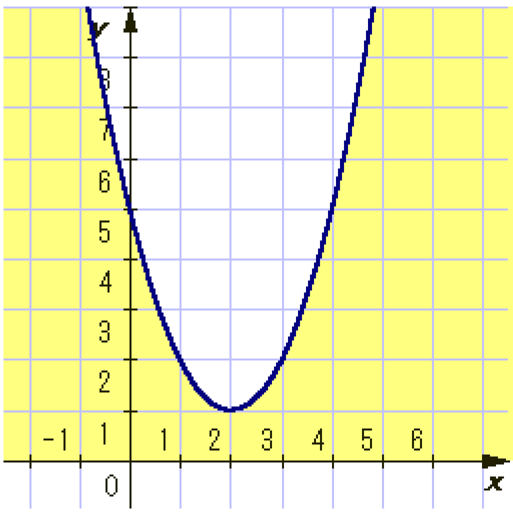
つまずきの解消

$\chi^2-4\chi+5>0$ を解くということは，$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなしたとき，常に $y>0$ となるような，χ の値の範囲を求めることです。

そこでまず，６０ページで２次関数のグラフを描くための式変形を確認しましょう。

$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなして，このグラフを描いてみます。
$y=\chi^2-4\chi+5$　の式は　　$y=(\chi-2)^2+1$

と変形できるので，右のように頂点は(２，１)，下に凸の放物線のグラフになります。



このことから，χ のすべての値に対して，$y>0$ となります。実際，主な値の変化を調べてみると，以下のようになり，ｙの値は常に正になると予想されます。

χ	…	0	1	2	3	4	…
y	…	5	2	1	2	5	…

このことをグラフを活用して確認すれば，
$\chi^2-4\chi+5>0$ の解は，<u>すべての実数</u>です。

誤答例１のつまずきの分析【１９－１】

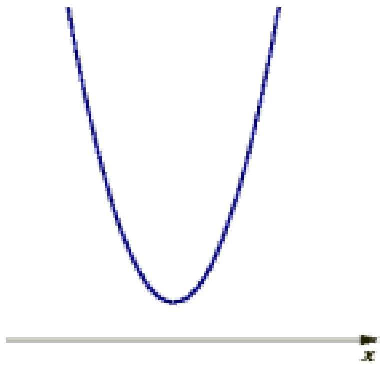
判別式をうまく利用できないと思われます。このような２次不等式はグラフをかく方法の他に，判別式とグラフが上に凸か下に凸かの判断することで解く方法もあります。判別式を利用することは，グラフを描く場合，予想を立てることができて便利です。

つまずきの解消

判別式を利用して，２次不等式を解くことができます。
そこでまず，６０ページで判別式と２次不等式の解との関係について確認しましょう。

ここでは，$\chi^2-4\chi+5=0$ とみなして判別式をとると
$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0$
となり，この方程式は解がないことがわかります。

これは　$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなしたグラフが，
χ 軸と共有点を持たないことと同じです。
χ^2 の係数 >0 なので，グラフは下に凸の右のようなグラフになります。



よって，$\chi^2-4\chi+5>0$ の解は，
<u>すべての実数</u>です。

誤答例２のつまずきの分析【１９－２】

２次方程式と２次不等式の関係を理解していないと思われます。$\chi^2-4\chi+5=0$とみなした２次方程式に解が無くても，$\chi^2-4\chi+5>0$の２次不等式にも解が無いとは限りません。$y=\chi^2-4\chi+5$のグラフの概形をつかむことが大切です。

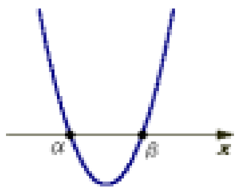
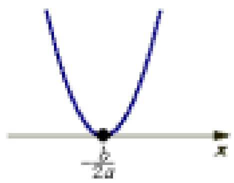
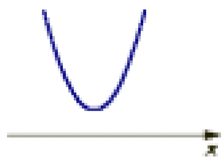
つまずきの解消

ここでは，$\chi^2-4\chi+5=0$とみなして，判別式をとると
$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0$となり，この方程式は解が無いことがわかります。

しかしながら，$\chi^2-4\chi+5>0$を解くということは，$y=\chi^2-4\chi+5$　とみなしたとき，常に$y>0$となるような，χの値の範囲を求めることです。

つまずきの分析と解消１９－１ページに戻ってみましょう。また，２３ページで２次関数と判別式について確認しましょう。

また，$a>0$の場合について，$a\chi^2+b\chi+c=0$　と　$a\chi^2+b\chi+c>0$，及び，$a\chi^2+b\chi+c<0$との関係をまとめると次の表のようになっています。２次方程式に解が無いからといって，２次不等式にも解が無いとは限りません。

b^2-4acの符号	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$y=a\chi^2+b\chi+c$ のグラフ （$a>0$の場合）			
２次方程式 $a\chi^2+b\chi+c=0$ の解	$\chi=\alpha,\ \beta$	重解　$\chi=-\dfrac{b}{2a}$	**解はない**
２次不等式 $a\chi^2+b\chi+c>0$ の解	$\chi<\alpha,\ \beta<\chi$	$-\dfrac{b}{2a}$ を除くすべての数	**すべての数**
$a\chi^2+b\chi+c<0$ の解	$\alpha<\chi<\beta$	解はない	**解はない**