⑧　誕生日あてクイズ

＜教材観＞

相手にひとつの数字を答えてもらうだけで、誕生日の月と日がわかってしまう質問を紹介し、そのひとつの数字から誕生日を導く方法について考えさせる。ほとんどの生徒がこれまでに、逆算すれば元の数にもどるという原理を利用した数当てや年齢当てのクイズをしたことがあると思うが、ここではそのような単純な逆算ではないのに、誕生日の月と日の両方を当てることができる（不定方程式ａｘ＋ｂｙ＝ｃの特殊解の見つけ出す）ことについてじっくりと考察させたい。

＜指導観＞

（１）自分の誕生日を使って計算し、質問の意味を把握させるところから始めることによって、誰もが主体的に取り組めるようにする。

（２）友達の誕生日を当てたり、自分の誕生日を当ててもらうことを通して、生徒間に交流が生まれ、活発に意見交換が出来るようにする。

（３）課題を解決するためには、一の位の数字に着目するか、最も近い 20 の倍数に着目することになる。このような点に着眼できた生徒達を大いに褒め称えて、数学に自信を持たせるようにしたい。

＜学習指導案＞

<table>
<tr><td colspan="2">指導対象学年</td><td>1 年</td><td>場所</td><td colspan="2">教室</td></tr>
<tr><td colspan="2">科目名・単元名</td><td>数学Ⅰ・数と式</td><td>使用教材</td><td colspan="2">プリント</td></tr>
<tr><td colspan="2">単元の目標</td><td colspan="4">不等式・方程式について理解を深め、式の見方を豊かにするとともに、それらを活用できるようにする。</td></tr>
<tr><td colspan="2">学習目標</td><td colspan="4">整数の特性を利用して、不定方程式より解を求めることができる。</td></tr>
<tr><td colspan="2">評価規準</td><td colspan="4">・題意を正確にとらえて式で表し、試行錯誤しながらも根気強く論理的に考えようとする。（関心・意欲・態度）
・式の表す値を規則性や整数の性質に着目して考察することができる。（数学的な見方や考え方）
・誕生日の導き出し方を他人にわかりやすく説明することができる。（表現・処理）</td></tr>
<tr><td colspan="6">本　時　の　展　開</td></tr>
<tr><td>過程</td><td>学習項目
指導のねらい</td><td colspan="2">学習活動
（□：指示・説明　　○：発問・活動）</td><td colspan="2">指導上の留意点
観点別評価（⇒：評価方法）</td></tr>
<tr><td>導入</td><td>生徒間で数当てゲームを行う。</td><td colspan="2">○＜導入＞友達と数当てゲームをしてみよう。例えば、次のような質問をしてみましょう。
「心の中に好きな数字を思い浮かべてください。その数字に５を足して、２倍した結果を教えてください。」</td><td colspan="2">・このとき、本時の課題と同じような不思議な質問が出た場合は、それを紹介させる。</td></tr>
<tr><td>展開</td><td>課題の内容を把握する。</td><td colspan="2">○＜課題＞誕生日当てクイズを紹介する。
「生まれた日を 10 倍したものに生まれた月を足してください。次にその結果を 2 倍して、それに生まれた月を足してください。結果はいくつになりますか。」
□自分の誕生日で計算させる。その結果を聞いて、それらを板書する。

□授業の日が誕生日の生徒がいれば祝福してから数字を答えさせる。</td><td colspan="2">・単純な数当てゲームと比較させ、逆算すれば元の数にもどるわけではないことを確認する。</td></tr>
</table>

	数学化の場面 クイズの意味を理解し、式で表現する。 「ひとつの数字から、なぜ月と日の両方がわかるのだろうか」と興味をもち、その解明に意欲的に取り組む。	○板書された数字を見て気がついたことや式で表して気がついたことは何ですか。 ・とり得る値の最小値は 23、最大値は 656。 ・誕生日が違えば、結果が違う。 ・生まれた月が同じならば、計算結果の一の位の数が等しくなる。 ・生まれ月が同じとき、誕生日が１日ずれると数字は２０ずつ変化する。　･･･など ○板書されている数字から友達の誕生日を当ててみよう。 例　175→5 月 8 日　　　110→10 月 4 日 333→11 月 15 日 100→×（100 は計算ミス。誕生日を導くことはできない。）	・生まれ月が同じとなる数字を必ず板書するようにする。 ・答えがわかっているものがあると、それが考えるヒントになる。 **・式の値の規則性や整数の性質に着眼して考察することができる。** **（数学的な見方や考え方）** **⇒発表を通して生徒の発想を評価する。**
	数学的考察・処理の場面 誕生日の導き方についてまとめ、意見交換をする。	○誕生日の導き方についてノートにまとめてみよう。　＜例えば、175 の場合＞ 誕生日を　x月y日とすると、 x, yは整数で$1 \leqq x \leqq 12$, $1 \leqq y \leqq 31$ $(y \times 10 + x) \times 2 + x = 3x + 20y$ したがって、$3x+20y=175$…@ ☆解１　20y は 10 の倍数なので、3x の 1 の位の数が 5 とならなければならない。 よって、$x=5$　@に代入して　$y=8$ ☆解２　20 の倍数で 175 に最も近い数は 160　このとき、@より $3x=15$ ゆえに$x=5$ また、$20y=160$ より $y=8$ 140 とした場合は、$3x=35$ となり不適、 120 以下の場合も、$3x \geqq 55$ となり不適。 ☆ この他、表を利用する解法など	・先の考察結果から誕生日を導く方法について考えさせる。 ・題意を式で表し論理的に考えようとする。 （関心・意欲・態度） ・ここには 175 を例に、導き方を示しておく。一の位が 3 と 6 の場合は少し面倒になる。333 は 175 と違うタイプである。 **・タイプ別に説明しようとする。** **（数学的な見方や考え方）** **⇒机間指導で生徒の取組を評価する。必要な場合は助言する。**
	数学的知識の意味付け・活用の場面 本時の課題を振り返り、さらに発展的に考察する。	□複数の生徒に誕生日の求め方を板書させる。この板書の時間、他の生徒達には、誕生日の導き方について友達と意見交換させる。 ○この課題をもとに発展的に考察しよう。 （予想される疑問や課題） ・x, y は自然数　$3x+20y=175$　の解は？ ・条件を変えて、$20x+3y$としたときも同じように誕生日が決定できるのか？ ・なぜ、3 と 20 なのか。他の数字でもうまくいくのか。 ・x, y は整数　$3x+20y=175$　の解は？ ・x, y は整数　$3x+20y$ のとり得る値は？ ・x, y は 0 または自然数　$3x+20y$ で表せない最大の整数は？　　　など ・不定方程式の解の視覚化（グラフの利用）	・わかりやすく説明しようとする。 （表現・処理） ⇒複数の生徒に板書させ評価する。 ・生徒にとっては、数学的に厳密な記述は難しいと思われる。生徒の解答を生かしながら、修正していく。 ・残り時間を考慮して、生徒に考えさせる。感想や疑問、あるいは新たな課題などを発表させる。

まとめ	今日の学習を振り返る。	〇本時の授業を振り返って、自己評価表を記入しよう。	・本時の授業をまとめる。 ・自己評価させる。

＜解説＞

（１）課題解決へのヒント（対応表）について

本時の課題を対応表にして書き出していくと次のようになる。このような表を書くことにより、式の値の規則性に気づき、整数の性質について理解が深まるはずである。誕生日の求め方がわからずに困っている生徒達には、「対応表を書いてみたらどうだろう。ただし、全ての誕生日について書く必要はないよ。ある程度書き出していけば、規則性がつかめるから。」と助言してあげるとよいのではないか。きっと、課題解決への糸口を見つけてくれるはずである。

	1日	2日	3日	4日	5日	6日	…	28日	29日	30日	31日
1月	23	43	63	83	103	123	…	563	583	603	623
2月	26	46	66	86	106	126	…	566	586		
3月	29	49	69	89	109	129	…	569	589	609	629
4月	32	52	72	92	112	132	…	572	592	612	
5月	35	55	75	95	115	135	…	575	595	615	635
6月	38	58	78	98	118	138	…	578	598	618	
7月	41	61	81	101	121	141	…	581	601	621	641
8月	44	64	84	104	124	144	…	584	604	624	644
9月	47	67	87	107	127	147	…	587	607	627	
10月	50	70	90	110	130	150	…	590	610	630	650
11月	53	73	93	113	133	153	…	593	613	633	
12月	56	76	96	116	136	156	…	596	616	636	656

（２）予想される疑問や新たな課題について

ア　上の対応表の中には、同じ数字は出てこない（この証明を考えさせても面白い。）が、もし仮に、$3x+20y$ ではなくて、$3x+10y$ という式の値を使っていたら、ひとつの数字から誕生日が複数対応し誕生日を特定することができなくなる。指導案の中に書いた、$20x+3y$ も同様である。３や 20 でなくてはならないことはないが、この２つの数字は、誕生日が特定できて、暗算でも計算できるような、ちょうどほどよい数字であるといえる。

イ　本時の課題は式で表現すると、（厳密性に欠けるが）

「x, yは $1 \leqq x \leqq 12$，$1 \leqq y \leqq 31$ を満たす整数とする。」$3x+20y=175$ の解は？」となる。

下線部のｘ，ｙの制限を変えることによって、新たな課題を作ることができ、不定方程式の一般解の話へと発展させることが出来る。

・「x，y を整数」にした場合は、$3x+20y=175$・・・①　$3 \cdot 5+20 \cdot 8=175$・・・②（特殊解利用）

①－②より　$3(x-5)+20(y-8)=0$　⇔　$3(x-5)=20(8-y)$

ゆえに、$x=5+20k$　　$y=8-3k$　　ただし、k は整数

・「x，y を自然数」にした場合は、（x，y）＝（5，8)，(25，5)，(45，2)となる。

ウ　「x，y は整数　$P=3x+20y$ のとり得る値は？」という疑問に対しては、「すべての整数をとり得る」が答えであり、生徒の中にはこの結果を意外に思う者もいるだろう。

証明１

$y=0$ のとき、$P=3x$ より 3 の倍数のすべてを表す。

$y=1$ のとき、$P=3x+20=3(x+6)+2$ より３で割って２余る数のすべてを表す。

$y=2$ のとき、$P=3x+40=3(x+13)+1$ より３で割って１余る数のすべてを表す。

ゆえに、P はすべての整数をとり得る。

証明２
x=7，y=－１のとき、3･7＋20･(－１)＝１が成り立つ。よって、任意の整数をｎとすると、
n=3･7n＋20(－n)　が成り立つので、すべての整数をとり得る。
これは、「ａ，ｂが互いに素であればａx＋ｂy＝１を満たす整数 x，y が存在する」という整数の重要な性質を使う具体例であるので、この証明は生徒にも考えさせたい。

（３）百五減算について

わからないはずの年齢や数を当てることのできる質問は、生徒にとっては驚きであったり、不思議なことであろうと思われる。このような質問を紹介することにより、数学への興味・関心をもたせ、学習への意欲を高めることが期待できるのではないだろうか。

不思議な質問は本時の課題の他にもいろいろとあり、「百五減算」と呼ばれる数あてクイズは有名である。これは、次のようなクイズであるが、その種明かしを考えさせたり、その原理を真似ねてオリジナルの数当てクイズを創作させることは、整数論の学習への動機付けになり、今後の発展的な数学的活動が期待できる。

数当てクイズ（百五減算）
Ａ：2 桁の数をひとつ考えてください。私がそれを当ててみせます。
Ｂ：はい、考えました。
Ａ：３で割った余りはいくつですか。
Ｂ：２です。←①
Ａ：では、５で割った余りはいくつですか。
Ｂ：３です。←②
Ａ：最後に、７で割った余りを教えてください。
Ｂ：４です。←③
Ａ：えーと、あなたの考えた数は、ズバリ５３ですね。
Ｂ：そうです。すごいですね。なぜ、わかるんですか。

Ａさんは、次のように順に計算していけば、Ｂさんの考えた数を瞬時に当てることができる。
（※）①の答えを聞いて、７０×２＝１４０を求めておく。
②の答えを聞いて、２１×３＝６３を求め、１４０＋６３＝２０３と足し算をしておく。
③の答えを聞いて、１５×４＝６０を求め、先の和に加えて、２０３＋６０＝２６３と求める。この数から、１０５を２回引いて２桁の数にすれば、５３と求められる。

この数当てクイズの元の形は
『碁石が何個かある。
まず３個ずつ取っていくと残りは２個である。
次に５個ずつ取っていくと残りは３個である。
また７個ずつ取っていくと残りは４個である。
さて、碁石は何個でしょうか』という問題である。

これは江戸時代に発表された「塵劫記（じんこうき)」（著者は吉田光由（みつよし））に載っている問題で、2 桁の数にするためには、上の例のように 105 を１、２回引くことが多いことから、百五減算と言われている。

（※の理由）
５と７で割り切れるが、３で割ると１余る数　⇒　７０
３と７で割り切れるが、５で割ると１余る数　⇒　２１
３と５で割り切れるが、７で割ると１余る数　⇒　１５
３でも５でも７でも割り切れる数　⇒１０５
を利用すれば、
３で割ってａ余り、５で割ってｂ余り、７で割ってｃ余るような数ｎは、
n=70a+21b+15c＋105ｋ　（ｋは整数）と表すことが出来る。
以上が（※）の計算の根拠である。