

ゲームを用いた数学的活動

岐阜県立岐阜高等学校

1 本校の概要と教育課程

本校は明治 6 年創立の旧制岐阜中学校を前身とし、今年で創立 137 年目を迎え、歴史と伝統のある男女共学の普通科の高校である。在校生は「百折不撓・自彊不息」の校訓の下、文武両道をモットーに活力ある学校生活を送っている。また、卒業生は 4 万人を超え、政・官・財界をはじめ各界各層で有為な人材として幅広く活躍している。

本校は平成 13 年に学校の基本理念（School Identity：SI）として「学ぶ・考える・思う」を設定し、将来目標とする人間像として「知性と精神性を高い次元で統合した人間」を意味する「トータル・パーソン」を掲げている。折しも小中学校の学習内容が以前より 3 割削減された現行課程が実施され、学校 5 日制も完全実施される中、授業時間確保と部活動などの教育活動を両立させる目的で、本校では平成 14 年度より 65 分授業が実施されている。

教育課程（平成 22 年度）

	1 年	2 年		3 年	
	全	文 系	理 系	文 系	理 系
数学	2				
数学	1	3	3	2	
数学			1		3
数学 A	2				
数学 B	1	2	1	2	
数学 C			1		3

文系 3 年は倫理、政治・経済、数学 B、音楽、美術、書道、フードデザインから 1 つ選択

2 研究のねらい

平成 21 年 3 月に新しい学習指導要領が公示され、数学は平成 24 年度から学年進行で実施される。今回の改訂のポイントとして、数学 に「データの分析」が加わったこと、数学 と数学 A に「課題学習」の実施が盛り込まれたことが挙げられる。「データの分析」では中央値（メディアン）や四分位偏差など、従来余り扱われてこなかった内容を、「生徒が意欲をもって学習を進めることができるよう、テーマを適切に選び、具体的な事象に基づいた扱いをする」（学習指導要領解説）ことが求められている。「課題学習」についても、「生活と関連付けたり発展させたりするなどして、生徒の関心や意欲を高める課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識できる」（同上）ことが求められ、この両者に共通していることは「具体的内容」を扱って、生徒に数学のよさを認識させることにある。他方で高校に入学したばかりの生徒、特に数学を苦手にする生徒の中には「なぜ数学を学ばなければいけないのか」と疑問に思い、学習意欲がわからない生徒がいることも事実である。そこで本研究では、生徒が意欲的に取り組みやすい「ゲ

ーム」を題材とした課題学習の教材を開発し、研究授業を行って実施上の問題点等を検証した。

3 研究内容

以下に挙げる「消えるマルペケ」というゲームを題材とし、生徒に場合の数、特に数え上げの方法と、それを考えるに当たって円順列の考えのよさを実感してもらえよう授業を行った。

<消えるマルペケ> (ルール)

- ・ 黒、白それぞれ1、2、3と数字が書かれたコマと、3×3のマス目の描かれた板を用意する。(黒を1、2、3、白を○、△と書くことにする)
- ・ 先手が黒、後手が白を持ち、マス目の空いているところにそれぞれ1、○、△、3、△...の順に交互に駒を置く。自分のコマを縦、横、斜めのどこか1列に先に並べたら勝ちとする。
- ・ 白△までコマを置き、どちらも1列に並んでいない場合、先手は黒1のコマを、空いているマス3か所のどこかに動かさなければならない。(必ず動かさなければならない。)
- ・ 次の後手は白△を、先手は黒2を...と、それぞれ1、○、△、3、△、1...の順で必ず動かさなければならない。
- ・ 最終的に縦、横、斜めのどこか1列に自分のコマを並べたら勝ちとする。

これは一般に「三目並べ」とか「マルペケ」と呼ばれているゲームをアレンジしたものである。ルールから分かるとおり、このゲームは囲碁や将棋、オセロなどと同じ「二人零和有限確定完全情報ゲーム」である。双方のプレイヤーが最善手を打てば、必ず先手必勝か後手必勝か引き分けかが決まるという特徴がある。このゲームはゲームが進めば選択肢が6つしかなく、さほど時間をかけなくても必勝法が分かる。

「消えるマルペケ」では自分の石が3個しかないことから、勝ちパターンとしては「相手が動かしたところに自分の石を動かして3つそろえる」しかない。それに気付かない生徒が若干いることから、「勝つパターン」の提示の意味で、詰め将棋ならぬ「詰めマルペケ」を出題し、できる限り早く生徒にルールを理解させるよう心掛けた。

<用語の統一と詰めマルペケの例：いずれも黒1番>

<用語の統一>

角	辺	角
辺	中央	辺
角	辺	角

<第1問>

1		
		2
3		

<1手詰め>

<第2問>

		2
	1	
		3

<3手詰め>

ルールはやや複雑であるが、クラスを4～5人のグループに分け、何回かゲームをさせると生徒は比較的早くルールを理解する。全員にルールを理解させた上で、以下の問題に取り組ませる。

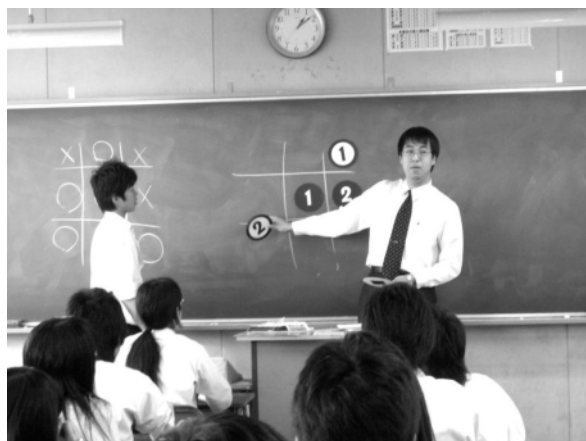
< 数学化の場面 >

初手（黒 1）の置き方は何とおりあるか。

2 手目まで（黒 1、白 まで）の置き方は何とおりあるか。

先手は初手をどこに置けば有利か予想しよう。

この問題に取り組みさせた後、生徒に自由にテーマを設定させ、このゲームの特徴を考えさせる授業を展開した。



< ルール説明の様子 >



< ゲームに取り組む様子 >

4 実践した感想・考察

上記のような授業を円順列学習前と円順列学習後で各 1 クラスずつ実施した。問題を解かせると、ほとんどの生徒が「9 とおり」と答えるが、回転または線対称移動して同じになる置き方を同一視して「3 とおり」と答える生徒もいる。円順列学習後の生徒は「3 とおり」と答える生徒が増える。「9 とおり」の方は直感的にすぐ分かるので、「3 とおり」と考えた生徒に理由を説明させると、円順列を学習する前の生徒は説明に苦慮するが、学習後の生徒はすぐに「円順列の考え方で...」と、回転させて同じものを同一視できることを指摘することができた。円順列の学習前のクラスでは、この部分に時間を割かれるため、この後の探求の時間が少なくなってしまった。しかし、学習前にこの授業を展開したことで、円順列の導入はスムーズにいき、理解も早く進んだ。

問題は回転に加えて線対称なものも同一視するため、数珠順列の知識が必要である。悩む生徒が少なからずいるため配慮を要した。

問題からが課題学習の本番であり、予測して自ら検証する活動である。ここにどれだけの時間を割くことができるかが実践上一番の課題である。本校では 65 分授業を行っているため、問題からの課題設定、探求の時間を 35 分ほど取ることができた。

生徒が設定したテーマ例と、探求の様子を簡単に紹介する。

(a) 「必勝法を考えよう」「最短でいかに勝つか」

このような漠然としたテーマを設定した班は、具体的に何を考えてよいか分からなくなる。

班員の思考もバラバラになってしまった。

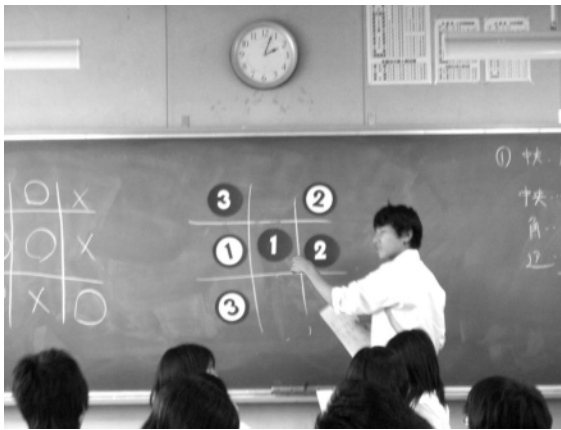
(b) 「勝ちになるパターン」「3 手詰め問題を作ろう」

先ほどと違い、具体的なテーマ設定となっている。「勝ちパターン」については詰めマルペ

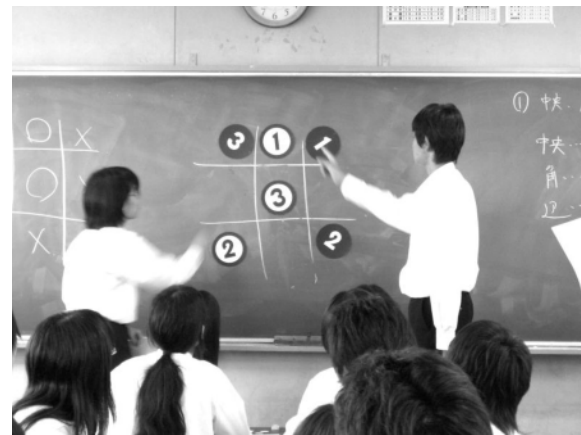
ケを考察して勝つ直前の形を説明しようと努力した。「黒番の時は、同じ数字をもう一枚…」などと、どのように説明するのが分かりやすいかを考え、議論していた。「3手詰め」の班は、班員各自で問題を作りあいながら、対称性を検証して同じ問題でないかどうかの検証がなされていた。

(c) 「石を4つに増やすとどうなるか」「石の番号をなくすとどうなるか」

ルールを変えてみる班もあったが、今回は自由に考えさせることとした。「石を4つ」については、白を置いた後は空きマスが1つなので手が自動で進む。最初の8手で勝ち負けが決まるため、対称性を考えなければ高々 $9! (=362880)$ 通り考えればよい。対称性や8手前に勝負が決まるパターンを排除すれば、およそ20000通り検証すればよさそうであるが、時間内に調べ尽くすのは不可能である。「石の番号をなくす」、つまり「～のどれを動かしてもよい」とするルールでは、ゲーム性が根本的に変わってしまう。それ以前に、このルールでは妨害し続けることでゲーム自体が成立しないのだが、生徒はそれに気付かずどうすれば勝てるかを考え続けていた。気が付いてほしかったが、ゲームが成立しないことを早めに教えてあげるべきであった。



<自作の「詰めマルペケ」を披露する生徒>



<必勝パターンの1つを披露する生徒>

<生徒の感想>

- ・なんとなく最初は辺に打つと強いと思ったので、辺について考えられてよかった。また必勝法を考えられてよかった。(予測を立てて探求できた生徒)
- ・簡単にできるちょっとしたゲームだが、数学的に考えると奥が深く、必ず勝てる条件を見付けることができてよかった。(数学的な見方のよさを実感できた生徒)

5 反省と今後の課題

生徒は非常に意欲的に取り組み、1時間では飽きたらず「次の時間も続けたい」と言う生徒が続出し、かなり好評であった。対称性や勝ちパターンを意識しながら、数学的にこのゲームを解析しようとする姿勢が見られてよかった。

ただ、上記のとおり生徒に自由にテーマを設定させた結果、テーマが広がりすぎてしまい、全体としてまとめきれずに授業が終わってしまった。そのため、本教材においてはテーマを自由に設定させるのではなく、「ある特定の盤面からの勝ち手順」といった具体的なテーマをこちらから提示した方が授業として成立すると考える。