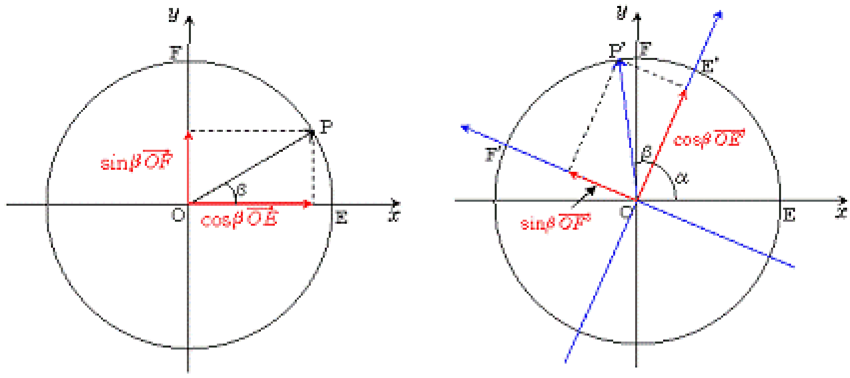
平成 21 年度　岐阜県高等学校教育課程講習会(数学部会)発表要綱

三角関数公式の納得の図解

加法定理を余弦定理と距離の公式から証明するのではなくベクトルを活用して証明しよう。
副題　加法定理など三角関数の公式の図解による納得と定着について。

富田学園　　岐阜東高等学校

加法定理の証明



ｘｙ座標軸と原点O、単位円を考える。座標（１，０）の点をE、（０，１）の点をFとする。角βの動径と単位円の交点をPとする。
三角関数の定義により点Pの座標は（$\cos\beta$、$\sin\beta$）である。
ｘ軸、ｙ軸への正射影を考えて$\overrightarrow{OP}$を分解することができる。

$\overrightarrow{OP}=\cos\beta$（１，０）$+\sin\beta$（０，１）$=\cos\beta\overrightarrow{OE}+\sin\beta\overrightarrow{OF}$

ここで単位円をE，P、Fを含めαだけ回転移動を行って
各点がE’、P’、F’となったとする。角βは変わらないから

$\overrightarrow{OP'}=\cos\beta\overrightarrow{OE'}+\sin\beta\overrightarrow{OF'}$　となる。さらに

$\overrightarrow{OE'}=$（$\cos\alpha$、$\sin\alpha$）、　$\overrightarrow{OF'}=$（$-\sin\alpha$、$\cos\alpha$）である。

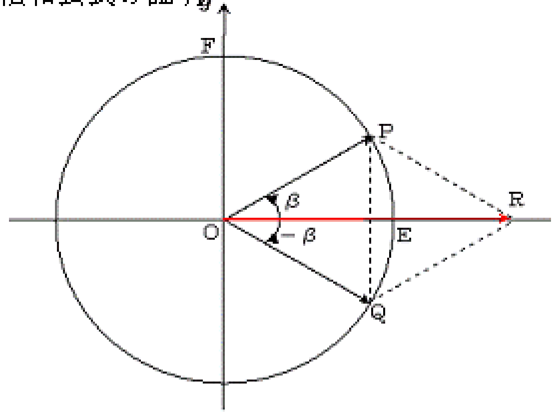
ここで　$\cos\beta\overrightarrow{OE'}$　＝（$\cos\alpha\cos\beta$、$\sin\alpha\cos\beta$）であり、

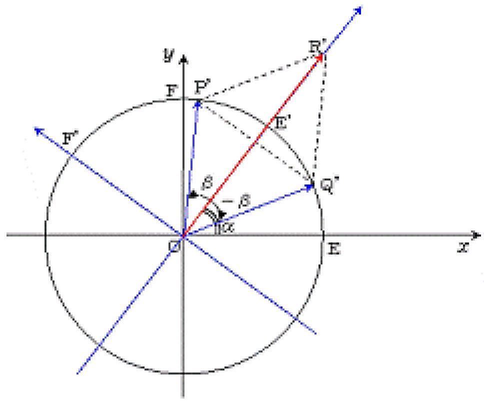
$\sin\beta\overrightarrow{OF'}$　＝（$-\sin\alpha\sin\beta$、$\cos\alpha\sin\beta$）であるから

$\overrightarrow{OP'}=$（$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$、$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$）

ここで$\overrightarrow{OP'}=$（$\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta)$）であった。
各成分が等しいから　加法定理が成立することが示された。

積和公式の証明





角βと　角$-\beta$の二つの単位ベクトル$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$を考える。

$\overrightarrow{OP}=$（$\cos\beta$、$\sin\beta$）、$\overrightarrow{OQ}=$（$\cos\beta$、$-\sin\beta$）であり、

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=$（$2\cos\beta$、0）$=2\cos\beta$（1，0）である。

Oを中心としてαだけ回転移動する。

$\overrightarrow{OP'}=$（$\cos(\alpha+\beta)$、$\sin(\alpha+\beta)$）、　$\overrightarrow{OQ'}=$（$\cos(\alpha-\beta)$、$\sin(\alpha-\beta)$）

$\overrightarrow{OR'}=2\cos\beta$（$\cos\alpha$、$\sin\alpha$）$=$（$2\cos\alpha\cos\beta$、$2\sin\alpha\cos\beta$）　、、、①

回転によっても平行性は保持されるから$\overrightarrow{OR'}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}$

$=$（$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$、$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$）、、②　　①、②により

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

こうして積和公式が得られた。また同様に$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$

$=$（$\cos\beta$、$\sin\beta$）$-$（$\cos\beta$、$-\sin\beta$）$=$（0、$2\sin\beta$）$=2\sin\beta$（0，1）

ゆえにαの回転で$\overrightarrow{Q'P'}=2\sin\beta$（$-\sin\alpha$、$\cos\alpha$）

$=$（$-2\sin\alpha\sin\beta$、$2\cos\alpha\sin\beta$）、、、③回転によって平行性が保持される

ので$\overrightarrow{Q'P'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}=$（$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$、$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$）、、、④

③、④より　$-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$

$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right)$$

残りの積和公式もこのように得られた。　$\alpha+\beta$＝A、$\alpha-\beta$＝B　と置き換えると和積公式となる。

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

二倍角の定理　（本文に沿って作図してください。）

角αの単位ベクトル$\overrightarrow{OP}$＝（$\cos\alpha$、$\sin\alpha$）

角$-\alpha$の単位ベクトル$\overrightarrow{OQ}$＝（$\cos\alpha$、$-\sin\alpha$）

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$とすると　$\overrightarrow{OR}$＝（$2\cos\alpha$、0）＝$2\cos\alpha$（１，０）

ここで菱形ＯＰＲＱをＯを中心にαだけ回転させる。

回転により　$\overrightarrow{OR'}=2\cos\alpha$（$\cos\alpha$、$\sin\alpha$）

＝（$2\cos\alpha\cos\alpha$、$2\sin\alpha\cos\alpha$）

$\overrightarrow{OP'}$＝（$\cos2\alpha$、$\sin2\alpha$）、、、①

$\overrightarrow{OQ'}$＝　（１，０）

また回転でも平行性は保持されるので

$\overrightarrow{OR'}=\overrightarrow{OP'}+\overrightarrow{OQ'}$

これより$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OR'}-\overrightarrow{OQ'}$

＝（$2\cos\alpha\cos\alpha$、$2\sin\alpha\cos\alpha$）－（１，０）

＝（$2\cos^2\alpha-1$、$2\sin\alpha\cos\alpha$）、、、②

①、②により

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

よって二倍角の定理が証明された。

なお$\overrightarrow{Q'P'}=2\sin\alpha$（$-\sin\alpha$、$\cos\alpha$）

＝（$-2\sin^2\alpha$、$2\sin\alpha\cos\alpha$）

$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OQ'}+\overrightarrow{Q'P'}$＝　（１，０）＋（$-2\sin^2\alpha$、$2\sin\alpha\cos\alpha$）

$\overrightarrow{OP'}$＝（$1-2\sin^2\alpha$、$2\sin\alpha\cos\alpha$）、、、③

①、③より

$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

三倍角の定理　（本文に沿って作図してください。）

角２αの単位ベクトルを$\overrightarrow{OP}$とする。角－２αの単位ベクトルを$\overrightarrow{OQ}$とする。

$\overrightarrow{OP}$＝（$2\cos^2\alpha-1$、$2\sin\alpha\cos\alpha$）

$\overrightarrow{OQ}$＝（$2\cos^2\alpha-1$、$-2\sin\alpha\cos\alpha$）

この二つのベクトルの差を$\overrightarrow{QP}$とすると

$\overrightarrow{QP}$＝（０、$4\sin\alpha\cos\alpha$）＝$4\sin\alpha\cos\alpha$（０，１）

いまここで菱形ＯＰＲＱを　Ｏを中心に　角αだけ　回転移動させる。

Ｐ、Ｒ、Ｑは　Ｐ’、Ｒ’、Ｑ’となったとする。

平行性の保持により　$\overrightarrow{Q'P'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}$

　これより$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OQ'}+\overrightarrow{Q'P'}$

角αの回転ゆえ

$\overrightarrow{Q'P'}=4\sin\alpha\cos\alpha$（$-\sin\alpha$、$\cos\alpha$）

$\overrightarrow{OQ'}$＝（$\cos\alpha$、$-\sin\alpha$）

$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OQ'}+\overrightarrow{Q'P'}$

＝（$\cos\alpha$、$-\sin\alpha$）＋$4\sin\alpha\cos\alpha$（$-\sin\alpha$、$\cos\alpha$）

＝（$\cos\alpha$、$-\sin\alpha$）＋（$-4\sin^2\alpha\cos\alpha$、$4\sin\alpha\cos^2\alpha$）

＝（$\cos\alpha$、$-\sin\alpha$）＋（$-4\cos\alpha$（$1-\cos^2\alpha$）、$4\sin\alpha\cos^2\alpha$）

＝（$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$、$4\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin\alpha$）

ここまでで

$\overrightarrow{OP'}$＝（$\cos3\alpha$、$\sin3\alpha$）と比べることにより

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$　これが　三倍角公式であった。

$\sin3\alpha$はあまり見ない形である。

すこし変形を加えることでよく使われる形にできる。

$\sin3\alpha=4\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin\alpha=4(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha-\sin\alpha$

　　$=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha$

　　$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$　　サンシャイン落ちて夜風が身に沁みる。