

数学Bにおける「漸化式」の具体的な利用方法

岐阜県立岐阜北高等学校

1. 本校の概要と生徒の実態

本校は今年で創立67年目を迎えた公立普通科高等学校である。校訓「変らぬ色の三つ柏 若き生命 高き志操 ペンの象 英知をもちて」を胸に文武両道をかかげ、勉学と部活動、生徒会活動など積極的に取り組んでいる。今年度から生徒のクラスがある南舎の校舎改築が始まり、3年後の平成22年度には新校舎が完成し、生徒の学習環境がより充実する予定である。

本校は2年次より希望別に文系と理系に分かれ、現在3年生9クラス（文系5・理系4）、2年生8クラス（文系4・理系4）、1年生9クラスの全26クラス、生徒総数1039名である。ほとんどの生徒が国公立大学の進学を希望している。

2. 本校の教育課程（数学）

2年次から文理分けを行い、数学の教育課程は次のようになっている。3年次では、文系での数学を選択制にし、個々の進学に必要な教科を選択している。

科目名	標準単位数	1年生	2年生(文)	2年生(理)	3年生(文)	3年生(理)
数学	3	3				
数学	4		4	4	3(選択)	
数学	3					4
数学A	2	3				
数学B	2		2	3	2(選択)	
数学C	2					3

3. 研究テーマ設定の理由

本校は進学校ということもあり、1年次から教科書をハイペースで進め、問題集も難しい問題を解かせている。そのため中学校からの数学と高校数学とのギャップが大きく、数学がある程度得意であり好きであった生徒が、高校に入学してから一種のカルチャーショックを受け、数学に対して苦手意識を持ってしまう生徒が多いのが現状である。さらに2年生から文理に別れ、文系では数学を不得意とする生徒が多く、理系ではハイレベルの問題を扱うため数学に行き詰まり感を持つ生徒が出始めている。

さらに授業は講義形式がほとんどであり、授業内容は「公式を説明しその公式を用いた演習をする」の繰り返しになってしまうのが現状である。そのため、数学の利用価値や日常生活に用いられている数学の魅力、ゲーム的な問題の数学の利用などを少しでも教え、数学のおもしろさに気が付けさせることをねらいとし、2年生理系の数学Bを教えるクラスに「ハノイの塔」を教え、研究に取り組むことにした。

4. 研究内容とその方法

数学Bで学習する「数列」と「ベクトル」はどちらも生徒にとっては難しい問題である。数列では、群数列や漸化式・数学的帰納法などを習い、解法のスキルやテクニックなどは演習を通して学習している。その中で「漸化式」についても、特性方程式を用いて解く解法や、自分で漸化式を作って解く問題なども教科書の例題で扱い習得している。しかし問題としてもう少しおもしろく、生徒が興味を持って考えることができる例題として『ハノイの塔』を取り上げ、2年生理系の2クラスでこの「ハノイの塔」について生徒に考えさせた。

プリント1を生徒に配布し、ハノイの塔の話を説明する。

まず生徒の興味・関心を引き出すために、ハノイの塔の話を生徒に読ませ、どんな話なのか理解をさせる。実際に生徒にやらせる前に、ハノイの塔の模型（円盤が7枚）を用意し生徒に見せる。生徒の目の前でどういう状況になっていて、どのように円盤を移動させるのかを見せ、移動させるときの注意点も説明しておく。

自分の机の上でハノイの塔をやってみる。

プリント1の下に5枚の円盤を書いておき、ハサミで切り取りハノイの塔を作る。円盤が1枚～5枚のときについて、最低何回で移動することができるのか生徒にやらせてみる。答えを数人に聞いてみて確認し、生徒1人を指名し5枚のときを模型を使って前でやらせてみる。

どうやって64枚のときの回数を求めるのか。

プリント2を配付し、漸化式を用いて回数を求められること説明する。ヒントとして、3枚から4枚に円盤を増やしたときを例にあげ、 n 枚と $(n+1)$ 枚のときの関係式である漸化式を作る。その漸化式を解き、 n 枚のときの回数（一般項）を求める。

64枚の回数がおおよそどのくらいの桁数（大きさ）なのか、常用対数を用いて計算する。

$n = 64$ のときの回数のおおよその値である桁数を求める。その数がどれくらいの大きさであり、64枚の円盤を移動させるのに何年かかるのか調べる。また、1日に3回、1秒に3回移動させると何年かかるかも計算させる。

5. 研究の成果

(1) 実際に手作業でやってみることが大切

実際にハノイの塔をやらせてみると、日頃の数学の授業とは違うということもあり、どの生徒も楽しんで一生懸命円盤を動かしていた。円盤が増えるに従ってだんだん複雑になり、隣の生徒と回数が同じにならないため、黙々と円盤を移動させる生徒もいた。やはり実物を前にしてまずはやってみることで問題に対する実感がわき、興味を持たせることができる。

(2) 今まで習ったことに結び付けて考えられる

一般項を求めるために、漸化式をつくるのが最善の方法であることにすぐに気が付く生徒はいなかった。しかし、1枚から5枚までの回数の数列から階差数列をもちいて一般項を求める生徒も何人かいたので別解として紹介した。また、1～5回までの数字を見て、一般項を推定することができる生徒もいた。

さらに桁数を求めるためには、数学Ⅰの指数対数で習った常用対数を用いて解くことには気が付いたが、桁数を求めるときに1桁間違える生徒が多かった。数学Bの知識だけではなく、数学Ⅰや他の単元の内容も必要になり総合的に問題を考えなければいけないことに注意が必要である。

(3) 公式や解法を理解している

出てきた漸化式は比較的簡単なものであるため、計算間違いなどをする生徒はほとんどいなかったが、中には漸化式をすぐに解くことができない生徒もいた。テストで公式の間違いや簡単な計算間違いで点数を落とす生徒が非常に多い。まずは問題の解法や公式をしっかりと確認し、「早く正確に」計算が出来るよう常に心がけなければいけない。

(4) 生徒の記憶に印象深く残す

演習で数多くの問題を解くことができて、模試や入学試験でその解法や解く鍵を忘れてしまっただけでは意味がなくなってしまふ。そのためどんな問題を解いてもその問題のポイントなどが印象に残るような指導をし、少しでも記憶に残しておくようにすることが必要である。

このハノイの塔で言うと、1枚円盤を増やす前と増やした後の関係から漸化式を用いて考えることができることを強調する。また、64枚の円盤を動かすために必要な回数が、「地球の誕生から46億年」「宇宙誕生から130億年」という数と比較することで膨大な数でありほぼ不可能であることを実感させ、生徒の驚きや感動を誘うことで数学のおもしろさを伝え、深く印象に残すことが可能である。

<気が付いたこと>

* 円盤に上から交互に白と黒の色を付けておき、白の円盤の上には黒の円盤、黒の円盤の上には白の円盤がくるように移動させると、最小の回数で移動させることができる。これを生徒に説明してから5枚の円盤を移動させると、スムーズに最小の回数を求めることができた。

6. 生徒へのアンケート結果

生徒の実態を把握するため授業後に簡単にはアンケートを実施し、その結果は以下ようになった。

	数学が得意?	数学に興味がある?	数学が将来役に立つ?
はい	20%	70%	48%
どちらでもない	51%	26%	42%
いいえ	29%	4%	10%

(2年生理系2クラス)

数学が嫌い、難しいと感じるときは？

- ・途中で行き詰まり、問題が解けなくなるとき
- ・数多くの公式を、どんなときにどの公式を使えばいいかわからないとき
- ・実際の生活とかかわることがほとんどないとき
- ・どうしてその公式が成り立つのか、理屈がわからないとき
- ・一生懸命考えた解いた問題を、「ピン(×印)」1本で済まされるとき

数学が楽しいと感じるときは？

- ・最後までスラスラと問題を解くことができたときや、難しい問題が解けたとき
- ・自分では考えつかなかったおもしろい考え方の計算方法を習ったとき
- ・数学とは関係ないと思われるところで、実は数学が大いに関係していると分かったとき

「ハノイの塔」をやってみた感想

- ・とてもおもしろく、興味を持って解いた問題は頭によく入るのでよい
- ・こういった問題なら粘り強く考えて、最後まで自力で解きたいと思った
- ・実際に作業をするとおもしろく、小学生に戻ったような気がした。

<アンケート結果より>

- * 2年生理系2クラスでの結果であるが、数学を得意とする生徒は少ないが、数学に対する興味や関心は高い方である。
- * 間違っている解答に対しても単に×だけを付けるのではなく、できる限りコメントや解くヒントを書いてあげるとよい。
- * 数学に興味を持たせるため多くの解法を説明し、ゲーム的な要素があるものについてはその説明もするとよい。
- * 生徒の中には「こういった問題は好きではない」といった意見もあった。

7. 今後の課題

毎日の数学の授業で多くの例題を説明するが、化学や物理などの授業とは異なり、実際に物を生徒の前で見せて実験をしながら説明することはほとんどない。作業の内容を黒板に書いたり、生徒に想像させることで問題を考えさせている。しかし生徒の中には、内容がしっかりと理解できない者や十分に理解する前に解答の説明が始まってしまったりする場合もある。なるべく具体的な物を使ったり、十分な説明と丁寧な図を使って生徒に説明する必要がある。

数学Bの漸化式とは別に、数学（2年生文系）の授業でプリントを使用し常用対数の問題を解かせた。これもハノイの塔と同じく求める数が膨大な数になり、自分の予想をはるかに超えた数になる問題である。

授業中の雰囲気は、ハノイの塔を行った理系クラスより常用対数を行った文系クラスの方が問題に対する食い付きがよく、若干騒がしくなったが楽しんで問題に取り組んでいた。アンケートはとっていないが、文系クラスなので数学嫌いは理系クラスより多いのは確かであるので、数学の授業をしなくてもよいという開放感もあったようである。しかし、問題を提示したときの反応や求める数の膨大さがわかったときの驚きは、理系クラスより顕著であった。

日頃から数学が苦手や嫌々やらされている生徒にとっては、こういった問題に触れることで少しでも苦手意識をなくし、様々な問題にチャレンジしようとする気持ちを持たせることができる。

毎回このような授業をすることは不可能であるので、新しい単元に入る前に導入での生徒の興味、関心を引く教材や、今回のハノイの塔のように学習が終わってからその利用方法がわかる例題を提示し、学習内容をより深めていくことが大切である。

またこのような授業をすると、終わってから「楽しかった」だけになってしまうことが多い。確かにおもしろさを教えることも必要だが、次につながる何かを各生徒1人1人が得られるように、指導内容や指導方法を検討していかなければいけない。

「ハノイの塔」は円盤をさす棒が3本だが、この棒が4本、5本となったときには、すべての円盤を移動させるのに必要な最小の回数はどうなるのか、発展的に問題を提示して生徒に考えさせることも有効である。