平成１７年度　岐阜県高等学校教育課程研究集会（数学部会）発表要綱

量の実感を大切にした数学の指導について

岐阜県立飛騨神岡高等学校

１　数学教育における「量」の問題について

かつて１９７０年代後半から８０年代にかけて、数学教育の中での「量」の問題について活発に議論された時期があった。数学セミナーなどの雑誌でも量についての連載があり、田村二郎の「量と数の理論」、小島順の「線型代数学」、森毅の「数の現象学」、遠山啓の著作集などが相次いで出版された。

量は数とは異なる固有の構造をもっており、遠山啓の著作では、

直接比較　→　間接比較　→　個別単位　→　普遍単位

という「単位の四段階指導」によって、現実と深く関わる「量」を導入している。

２　単位付きの計算と線形空間としての量

田村二郎は「量と数の理論」の中で、「m（メートル）というのは、『メートル原器の長さ』という量を表しており、例えば$2m$とはその長さの２倍という意味で、$2\times m$あるいは、$m\times 2$と書いてもよい。」としている。長さや重さなどの量は、１次元線形空間であり、その実数倍を考えることで量の演算を数学的に行うことができる。

この考え方では、例えば、

$$2km = 2\times k\times m = 2\times 1000\times m = 2000m$$

という書き方が自由にできるが、単位を数学とは関係ない、単なる付属物と見なせば、

$$2km = 2000m$$

という単純な事実でさえも式で表すことはできなくなってしまう。

遠山啓は、量を分離量と連続量に分類し、さらに連続量をヘーゲルの用法にならって、

外延量・・・広がりを表す量。量の合併がそのまま加法で表現できる「加法的」な量。
（長さ、面積、時間など）

内包量・・・強度を表す量。「１あたり量」。速度、密度など、加法的ではない量。

に区別している。

さらに乗法・除法について次の「内包量の３用法」によって分類している。

（第１用法）　外延量÷外延量＝内包量　・・・　$6g \div 2cm^3 = 3g/cm^3$

（第２用法）　内包量×外延量＝外延量　・・・　$3g/cm^3 \times 2cm^3 = 6g$

（第３用法）　外延量÷内包量＝外延量　・・・　$6g \div 3g/cm^3 = 2cm^3$

例えば第１用法は、２つの外延量から内包量を生み出す過程である。第２用法は、小学校で

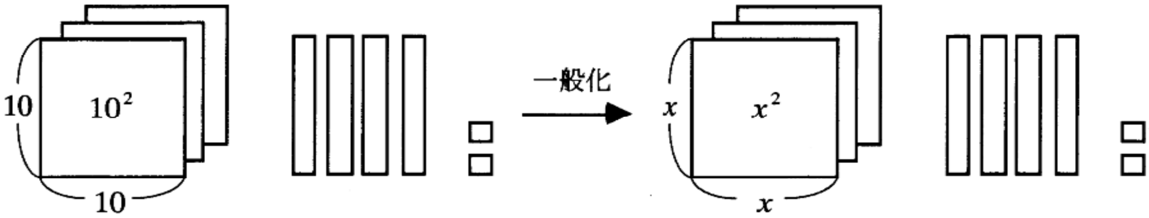
（１あたり量）×（いくら分）＝（全体量）

１あたり量から全体量を計算する式として登場するが、正比例$y = ax$　の量的な意味付けでもある。

３　ベキタイルによる数と式の計算

本校では、習熟度別の少人数授業を行っている。とくに習熟度の低いクラスの中には、かけ算の九九や、加減の計算が十分にできない生徒がいることは事実である。高校生としてのプライドを尊重して、なるべく新鮮な教材にふれながら、少しずつ加減乗除の計算にも慣れていくように配慮している。

「水道方式」の計算体系の中では、数をイメージするための図（シェーマ）として、「タイル」という教材を用いる。タイルは十進法の位取りの構造をわかりやすく説明することができるが、さらにそれを一般化した「ベキタイル」は多項式の計算にも有効である。



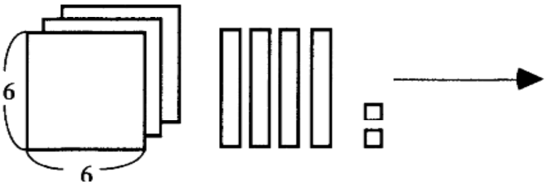
$342 = 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 2$　　　　$3x^2 + 4x + 2$

（1）２進法と誕生日当てカード

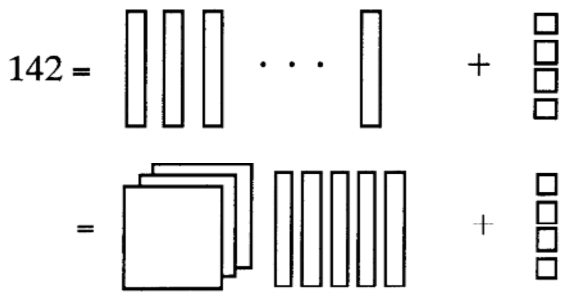
タイルによる十進法の位取りと、六進法、二進法などの計算方法に慣れた後、誕生日当てカードなど、楽しみながら二進法に習熟できる教材を用いて、新鮮な気持ちで「数と式」の単元に入れるように配慮している。

1. 今、６個集まるごとにけたがくり上がる数（六進法）を使う人たちがいたとしよう。この人たちが" 342 " と表す数を、彼らのタイルで表すとすると、どうなるだろうか。また、これらの数を、私たちの数で表すと、いくつになるだろうか。

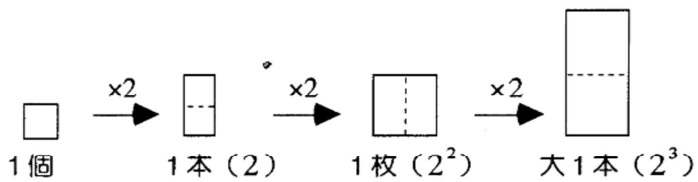
<六進法のタイル>　　　　<十進法では…>



2. 次に逆に十進法の数を、六進法に翻訳することを考えてみよう。
例えば十進法の１４２が、六進法でいくらに当たるかを考えるには、六進法のタイルで、何枚何本何個になるかを考えればよい。

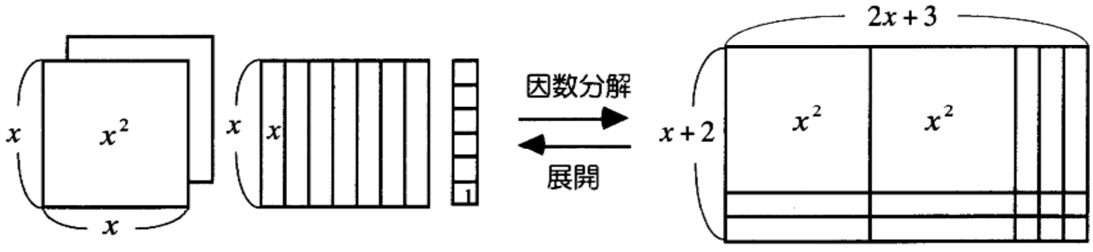


二進法　二進法では、同じものが二つ集まるごとに、桁が上がっていく。



（2）タイルを用いた因数分解

中学校で習った展開、因数分解もタイルで復習し、計算が得意な生徒はたすきがけに移行させるが、生徒は「タイルの計算は新鮮な感じで、パズル感覚で楽しめた」という授業の感想を書いてくれる。とくに習熟度の低いクラスでは、試験なども、タイルの図を印刷したものでやらせるようにしているが、公式の暗記は強要せず、$(x+y)^2$の展開やa^2-b^2の因数分解も、すべてタイルでやっている。



$2x^2+7x+6$　　　　$(x+2)(2x+3)$

4　量の対応としての関数

これまで私は関数の授業の導入では、折り紙を利用して箱の容積の最大値を求める問題から入ってきた。このとき、ｘは、箱の高さ（cm）、ｙは箱の容積（cm^3）であって、ｘとｙは単位が異なるので、目盛りを同じにする必要はない。

また生徒は、２次関数や２次不等式で、ｘの値とｙの値を混同することがよくあるが、長さ（cm）と容積（cm^3）、時間（秒）と距離（m）のように、ｘ、ｙそれぞれの量と単位を意識させた方が、理解しやすいようである。

時間や距離などという量は生徒にとっては難しいので単純に数の対応関係としてとらえさせた方がよいという議論もあるが、例えば物体の投げ上げの問題ならば、

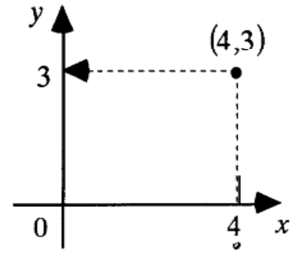
何秒後　→　高さ何m　　　高さ何m　→　何秒後

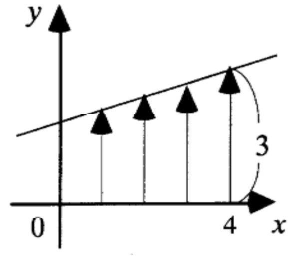
といった問題のグラフ上での意味を何度も確かめさせる練習をした方が、現実の変化と結びつけて理解することができ、生徒も「学んでいて楽しかった」という感想をもってくれる。

5　関数と解析幾何の区別について

これはすでに６０年代に議論されたことだが、数学Ｉで座標平面を扱うときに、関数としての扱い方と、解析幾何としての扱い方をもっと区別すべきではないだろうか。

＜解析幾何＞　点 $(4,3)$　　　　＜関数＞　$f(4)=3$





例えば、平面上の点$(4,3)$を考えると、図形としての点が、ｘ座標の４とｙ座標の３という数に分解されると考えると、ｘとｙは対等な存在であるが、関数においてｙはｘに従属する変数であってｘと対等ではない。実際にグラフを描かせるときは、ｘの値の上にｙの値が乗っている、というイメージで、ｙの値を線分、または矢印で表して、その矢印の先を線でつなぐとグラフになる、というように指導しないと、なかなか関数の点をプロットするということができない生徒がいる。

また、１次関数の中で「ｙ切片」や「傾き」、２次関数の中で「グラフの平行移動」のように、本来グラフを図形として、解析幾何的に取り扱うときの概念が混じっている。もちろん関数のグラフを図形として取り扱うことが悪いわけではないが、指導上は「関数」としての取り扱いとは別の問題であることを意識した方がよいと思う。

6　関数を局所的な変化によってとらえる

私自身を含め、多くの場合関数の指導は

$y = ax$（正比例）→　$y = ax + b$（１次関数）

→$y = ax^2$（２乗に比例）→　$y = ax^2 + bx + c$（２次関数）

という過程で行われるが、これでは関数をはじめから「式」として認識することから始まっている。

実際に私たちが現実の中で量の変化をとらえるときは、

（１）差（差分）を考えることで、局所的な変化をとらえる

（２）大域的な対応を考えて式化する

という段階、すなわち一般化すると

差分方程式（微分方程式）　→　一般式

という過程で関数の式に到達する。差分、すなわち階差によって関数を分類するならば、

・階差が一定　→　一様変化
・２階階差が一定　→　２次式（等加速度運動）
・階差がその時の量に比例　→　指数関数

というように、微分方程式を視野に入れながら、現実の量の変化に即した関数の指導を行うことができるのではないだろうか。とくに１次関数、２次関数については、水槽やカーテンレールなどいろいろな道具を教室に持ち込んで、実験と予測に基づいた授業を展開することで量の解析を中心に据えた関数の授業を展開することができる。

7　最後に：　「長さ×長さ＝面積」　とはどういうことを意味しているか？

先に「長さ」とは、単位で測定された「数値」ではなく、測る以前から存在している「丸ごとの量」であると考えたが、それでは例えば「長さ×長さ＝面積」というのは数学的にどう式化されるのだろうか？量そのものに対して「演算」を考えることができるのだろうか？

この疑問に対して、１９７０年代に小島順は公理的線型空間論の立場から、１次元線型空間としての量について精密な考察を行っており、さらに小島理論に対する反論も含めて、近年「数学教室」紙上で議論が展開されてきた。

小島によれば、例えば速度とは、時間の線型空間Ｘ（たとえば秒を枠とする）から距離の線型空間Ｙ（ｍを枠とする）への線型写像であり、その枠はｍ・秒$^{-1}$となる。同様にＸとＹを長さの線型空間とするとき、それぞれの元x、yのテンソル積$x \otimes y$が「面積」を表す双線型写像となる。

このように、量の計算での「単位」や「測定」の概念は線形写像によって、また量同士のかけ算の構造は双線形写像やテンソル積の概念を用いて定式化されており、「かけ算とは何か？」を現実の量に立脚して意味付け、算数・数学教育の中で取り扱う方法について議論が深められてきている。

「量」については、数学的な基礎も確定し、すでに多くの議論が行われていながら、算数・数学教育の中で十分に活用されていないのはもったいない気がする。ぜひ活用していただきたいと思う。