

## 数学Ⅲにおける微分方程式の取り扱いについて

岐阜県立大垣南高等学校

### 1 本校の歴史と概要

本校は、昭和24年に大垣市美和町に大垣南高等学校として創立され、昭和49年に大垣市浅中へ校舎が移転し現在に至っている。平成10年には創立50周年を迎えており、今年は創立56年目にあたる。創立当初は、普通科・商業科・家庭技芸科・農業科・商業科を併せもつ学校であったが、昭和44年から普通科のみの学校となった。平成16年度から1学年7クラスの全校生徒数840人の構成となった。

### 2 数学Ⅲ・Cの履修単位数

本校では、数学Ⅲ・Cを3年生理系クラスの生徒が履修する。数学Ⅲは4単位で数学Cは2単位である。

### 3 微分方程式の導入趣旨と取り扱いについて

「高等学習指導要領解説（数学編）」には「数学Ⅲ」の目標が次のように示されている。

極限、微分法及び積分法についての理解を深め、知識の習得と技能の習熟を図り、事象を数学的に考察し処理する能力を伸ばすとともに、それらを積極的に活用する態度を育てる。

極限・導関数等の各項目分野ごとの取り扱いについては詳しく記載されているが、微分方程式に関しては記載されていない。これは「曲線の長さ」、「速度と道のり」、「微分方程式」の分野が積分範囲で発展として位置付けられているからである。しかし、従来までは取り入れられていなかった「微分方程式」の分野を、発展としてであっても導入するには、その趣旨を踏まえながら、生徒の実態に合わせた授業展開を考えていく必要がある。

本校で教科書として使用している「数研出版 数学Ⅲ」の教授資料冊子における「微分方程式」に関する指導上の注意事項を参考に、以下の3つの観点を踏まえ指導することとした。

- ・微分方程式は、前学習指導要領のときから高校では指導されなくなったが、自然科学を学ぶ際の重要な方法として、その意義を理解させる。
- ・解法については、ほんの入り口にとどめて、深入りは避ける。
- ・物理分野等での身近な例を提示して、ニュートンとライプニッツによる微分・積分学の創始以来、微分方程式を解くことによって、自然科学と数学が手を携えて発展してきたことにも触れる。

### 4 微分方程式で表現される自然現象（種々の具体例）について

高校の物理で学ぶ内容や、身のまわりの自然法則が、微分方程式で表現されるという事実を知ることにより、この分野を学ぶ意味が明確になる。そこで、比較的易しいものを3つ選んで、それらが微分方程式によっていかに表現されるかを授業で取り扱った。

#### (1) ばねの運動

ばねに重りをつけてのばすと、重りにはつりあいの位置からのばした長さに比例してつりあいの位置に戻ろうとする力が働く。したがって、ばねの自然長からの位置を  $x = x(t)$ 、物体の質量をとすると、次の方程式が成り立つ。

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (k \text{ は正の定数})$$

## (2) 放射性元素の崩壊

ウラニウム 238、炭素 14 などの放射性元素は、現在の質量に比例して別の元素に変わり、その元素自体は減少していく。このような放射性元素の時刻における質量を  $M(t)$  で表すと、次の方程式が成り立つ。

(  $k$  は正の定数)

※  $y' = -ky$  の形の微分方程式は、物理学、化学、経済学などの分野で多く現れる。

## (3) 雨滴の落下速度

物体を地表面近くで自由落下させるとき、物体には重力の他に空気抵抗がかかる。この空気抵抗は物体の速さが小さいときは速さに比例した大きさ（比例定数  $>0$ ）であり、物体の速度の向きとは逆向きにかかることが知られている。したがって、物体の質量を  $m$ 、速度を  $v(t)$ 、重力加速度を  $g$  とおくと、次の方程式が成り立つ。

## 5 微分方程式の教科書における取り扱いについて

教科書では、微分方程式の例題として、変数分離による解法例が解説されている。

変数分離型の微分方程式としては、以下のようなものを授業で扱った。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad \frac{dy}{dx} = ky \quad \frac{dy}{dx} = -ky$$

これらのほかに、置き換えによる解法なども授業で扱った。また、初期条件（ここでは、解曲線がひとつの定点を通過するという条件）が与えられた場合の特殊解についても、教科書で例題として載っているものを扱った。

初期条件は、先に取り上げた種々の具体例にあるような微分方程式において、より具体的な意義をもつものであることは言うまでもない。

## 6 まとめと課題

微分方程式は自然科学の現象を解明するのに必要不可欠なものである。大学で学ぶ講義では、理工系はもちろんのこと経済系等においても微分方程式ぬきでは考えられない。今回の指導要領に微分方程式が発展分野であっても導入されたのは、それほど重要性にも関わらず高校数学の範囲外となっていたことに対する、大学側からの要求であるとも言われている。微分方程式と同様に「曲線の長さ」、「速度と道のり」の分野も発展として位置付けられているが、旧課程でも取り上げられていたものなので、導入する上でさほど問題はないと思われる。新課程による大学入試はこれから始まるのであるから、数学Ⅲに関わらず他の分野においても指導法の研究と研鑽に励む必要がある。