生徒の興味を引く素材の研究（数学Ⅱ）

岐阜県立土岐商業高等学校　　築樋　良文

研究の動機

最近の生徒は考えることを避ける傾向がある。ＷＨＹに特に拒絶反応を持っている。その様な状況では生徒は証明などをどれほど丁寧に説明されても、厭きることはあっても理解することはない。

そこで生徒の興味を引くにはどうしたらよいか。興味を持てば少しは考えるようになるかも知れない。そのためには思わぬ結果が出る例や、将来の仕事に役立っている例を紹介することにした。

実践

(1)　剰余の定理

中国剰余定理　（**ＲＳＡ法**に利用）

$a, b \in \mathrm{N}^+$(正整数)且つ$(a, b)=1$とし、$m, n \in \mathrm{N}$とするとき、

$x \equiv m \pmod{a}$

$x \equiv n \pmod{b}$ なる 整数 x は ab を法として *unique* に定まる。

の解を構成する証明法を利用すれば、

x の整式　$\mathrm{P}(x)$ を $x-\alpha$ で割ると余りが m、$x-\beta$ で割ると余りが n であるとき、整式を $\mathrm{P}(x)$ を$(x-\alpha)(x-\beta)$ 割ったときの余りを求めよ。〈ただし $\alpha\neq\beta$ とする〉

の解は
$$\frac{m-n}{\alpha-\beta}x+\frac{n\alpha-m\beta}{\alpha-\beta}$$

であることが分かる。（実際の授業ではα, βは具体的な数値を用いた。）

演習１　整数Ｎを 3 で割っても、5 で割っても余りが２であるとき、整数Ｎを 15 で割ったときの余りを求めよ。

演習２　整数Ｎを 3 で割ると余りが 1、5 で割わると余りが 2 であるとき、整数Ｎを 15 で割ったときの余りを求めよ。

演習３　整数Ｎを 3 で割っても、5 で割っても、7 で割っても余りが 2 であるとき、整数Ｎを 105 で割ったときの余りを求めよ。

演習４「今有物不知其数、三三数之剰二、五五数之剰三、七七数之剰二、問物幾何。」　孫子算経

訳（3 で割ると 2 余り、5 で割ると 3 余り、7 で割ると 2 余るその数は何か。）

注　ただし解は 105 以下の自然数でもとめる。そこでこの問題を百五減算とも言う。

（2）解と係数の関係（対称式の値）

2 次方程式 $x^2-ux+v=0$ の 2 解をα, βとするとき.その対称式の値を求める。

$\alpha+\beta=u$　　　$\alpha\beta=v$　であるから

(1)　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=u^2-2v$

(2)　$\alpha^3+\beta^3=u^3-3uv$

(3)　$\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{u^3-3uv}{v}$

(4)　$\alpha^4+\beta^4=u^4-4u^2v+2v^2$

(5)　$\alpha^5+\beta^5=u^5-5u^3v+5uv^2$

…

さて　$n\in\mathbb{Z}$に対し$\alpha^n+\beta^n=u(n)$とおくと、$u(-1)=\alpha^{-1}+\beta^{-1}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$で

$\alpha^{n\pm2}+\beta^{n\pm2}=(\alpha^{n\pm1}+\beta^{n\pm1})(\alpha^{\pm1}+\beta^{\pm1})-(\alpha^n+\beta^n)\alpha\beta$　であるから

$u(n\pm2)=u(n\pm1)\,u(\pm1)-u(n)\,\alpha^{\pm1}\beta^{\pm1}$　（以上複号同順）

だから induction　により$n\in\mathbb{Z}$に対し$\alpha^n+\beta^n$は、α,β 2文字の基本対称式と数で表される。

さらに同様にして$n\in\mathbb{Z}$に対し$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$も、$\alpha,\beta,\gamma$ 3文字の基本対称式と数で表される。

(2)　連分数の値（循環連分数の値は２次方程式で求められる。）

1，$1+\dfrac{1}{1}$，$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}$，$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}}$，…の極限$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\ddots}}}}$の値はいくらか。

方程式$x=1+\dfrac{1}{x}$を解けばよい。このように循環する連分数の値は２次の無理数で与えられる。

Euler(1737)

逆に２次の無理数は循環連分数で表される。

Lagrange(1770)

演習１　次の値を求めよ。

①　$1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\ddots}}}}$

②　$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\ddots}}}}}}}}$

③ $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}}$

④ $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}}}}$

(3)　複素数（虚数単位 i の累乗は図で求める）

虚数単位 i とは $i^2=-1$ なる特別な数すなわち $i=\sqrt{-1}$ である。

従って　$i=i$

$i^2=-1$

$i^3=i^2\times i=-i$

$i^4=i^3\times i=-i\times i=-(-1)=1$

$i^5=i^4\times i=1\times i=i$

$i^6=i^5\times i=i\times i=-1$

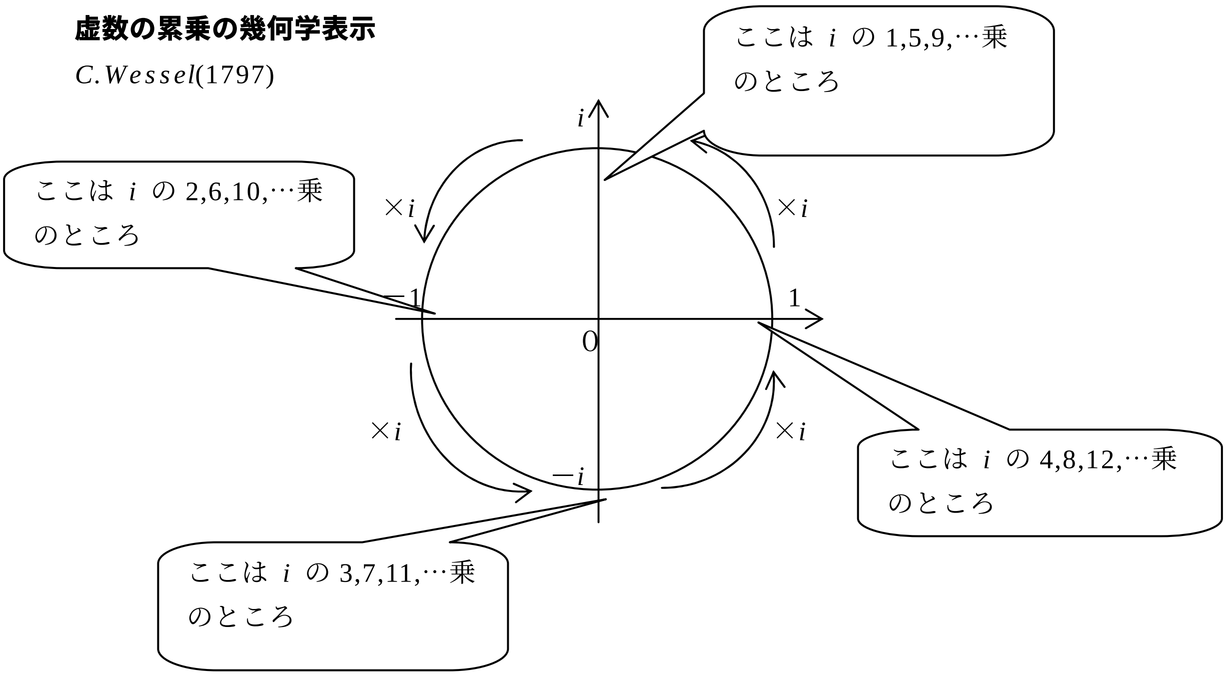
$i^7=i^6\times i=-1\times i=-i$

$i^8=i^7\times i=-i\times i=-(-1)=1$

…

虚数の累乗の幾何学表示

C.Wessel(1797)



(注) *C.Wessel*(1797)は i ではなく ε を使った。

これは負の指数にも利用できる。

演習１　次の値を求めよ。

① i^{10}　② i^{20}　③ i^{50}

④ i^{100}　⑤ i^{2004}

演習２　次の式を計算せよ。

① $3i^3+4i+5$　② i^4+3i^3+4i+5　③ $(1+2i)(3+i)$

④ $(1+i)^2$　⑤ $(-1+\sqrt{3}\,i)^2$

(4)三角比の値

①　15゜の倍数の角の三角比

15゜＝45゜－30゜　，75゜＝45゜＋30゜，105゜＝60゜＋45゜などから加法定理を利用する。

角度 / 関数	15゜	75゜	105゜	165゜
$\sin\theta$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\cos\theta$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\tan\theta$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$-2-\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$

②　18゜の倍数の角の三角比

3×18゜＝90゜－2×18゜だから　$\sin(2\times18^\circ)=\cos(3\times18^\circ)$　又は $\sin(2\times18^\circ)=\sin(3\times18^\circ)$

と2倍角3倍角の公式より

角度 / 関数	18°	36°	54°	72°
sin θ	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
cos θ	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$
tan θ	$\dfrac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{20}$	$\dfrac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{(3\sqrt{5}+5)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{20}$	$\dfrac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

③　3°の倍数の角の三角比

①，②と加法定理から 3°の倍数の角度の三角関数の値が求められる。

3°＝18°－15°　だから

角度 / 関数	3°
sin θ	$\dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}$
cos θ	$\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}$
tan θ	$\dfrac{\sqrt{110-60\sqrt{3}+46\sqrt{5}-28\sqrt{15}}-3\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}+4}{2}$

④正１７角形の作図可能性（おまけ）

現在まで $2^{2^k}+1$ の形の素数を Fermat prime number といい、k＝0,1,2,3,4 までは素数となることが解っていて p＝3,5,17,257,65537 である。この形のそれより大きい素数の存在は不明である。
しかし、自然数ｎが２の冪と上の素数の積に素因数分解されるときに限り正ｎ角形は作図可能なことはかのGauss によって示され、この証明によって彼は数学の道に進むことを決心したという。
ここに 17 角形の作図可能性についてのみの証明を紹介する。

<Proof> ζ＝360°/17 のとき、

a＝cos　ζ＋cos 4ζ

b＝cos2ζ＋cos 8ζ

c＝cos3ζ＋cos12ζ＝cos3ζ＋cos(17－5)ζ＝cos3ζ＋cos(－5)ζ＝cos3ζ＋cos 5ζ

d＝cos6ζ＋cos24ζ＝cos6ζ＋cos(17＋7)ζ＝cos6ζ＋cos 7ζ

と置きさらに　e＝a＋b　, f＝c＋d　と置くと

$$e+f=\sum_{k=1}^{8}\cos k\zeta=\frac{\sum_{k=1}^{8}2\cos k\zeta}{2}=\frac{\sum_{k=1}^{8}(\cos k\zeta+\cos(17-k)\zeta)}{2}=\frac{\sum_{k=1}^{16}\cos k\zeta}{2}$$

ここで　$\displaystyle\sum_{k=0}^{16}\cos k\zeta=\frac{\sin\frac{17\zeta}{2}\cos 8\zeta}{\sin\frac{\zeta}{2}}$　だから

$$e+f=\frac{\sum_{k=0}^{16}\cos k\zeta-1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{16}\cos k\zeta-\frac{1}{2}=\frac{\sin\frac{17\zeta}{2}\cos 8\zeta}{2\sin\frac{\zeta}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{\sin 180^\circ\cos 8\zeta}{2\sin\frac{\zeta}{2}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

そこで

2ab＝2(cos　ζ＋cos 4ζ)(cos2ζ＋cos 8ζ)

＝2cos2ζcos ζ＋2cos4ζcos2ζ＋2cos8ζcos ζ＋2cos8ζcos4ζ

＝ cos3ζ＋cos ζ＋cos6＋cos2ζ＋cos9ζ＋cos7ζ＋cos12ζ＋cos4ζ

$$=\sum_{k=1}^{8}\cos k\zeta$$

＝e＋f

よって

2ab＝　　　　　　　e＋f＝－1/2

2ac＝2a＋b　　＋d

2ad＝　　b＋c＋2d

2bc＝a　　＋2c＋d

2bd＝a＋2b＋c

2cd＝　　　　　　　e＋f＝－1/2

従って

2ef＝2(a＋b)(c＋d)＝2ac＋2ad＋2bc＋2bd＝4(a＋b＋c＋d)＝4×(－1/2)＝－2

即ち

e＋f＝－1/2, ef＝－1　だから　e, f　は 2 次方程式　x^2＋1/2x－1＝0　の正と負の 2 解で

e＝cos ζ＋cos2ζ＋cos4ζ＋cos 8ζ

＝cos(2π/17)＋cos(4π/17)＋cos(8π/17)＋cos(16π/17)

＝2cos(π/17)cos(3π/17)＋cos(8π/17)－cos(π/17)

＝{2cos(3π/17)－1} cos(π/17)＋cos(8π/17)＞0

∵0＜3π/17＜π/3　より cos(3π/17)＞cos(π/3)＝1/2。且つ　π/17，8π/17，は鋭角
故に

$$e=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\quad,\quad f=\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$$

さて、a＋b＝$e=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$，ab＝(e＋f)/2＝－1/4　より a,b は２次方程式 $4x^2+(1-\sqrt{17})x-1=0$ の正負の２解で

a－b＝(cosζ＋cos 4ζ)－(cos2ζ＋cos8ζ)＝(cosζ－cos 2ζ)－(cos4ζ－cos8ζ)＞0
より　a＞0　故に

$$x=\frac{-(1-\sqrt{17})\pm\sqrt{(1-\sqrt{17})^2-4\cdot4\cdot(-1)}}{2\cdot4}=\frac{-1+\sqrt{17}\pm\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$ から

$$a=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8},\quad b=\frac{-1+\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

また同様にして c，d　は

$$c=\frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8},\quad d=\frac{-1-\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$$

もう一度和と積

cosζ＋cos 4ζ＝a，cosζcos 4ζ＝1/2(cos5ζ＋cos3ζ)＝c/2 及び　cosζ＞cos4ζ より
cosζ，cos 4ζ　は $x^2-ax+c/2=0$　の２解で

$$\cos\zeta=\frac{a+\sqrt{a^2-2c}}{2}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

∵　$a^2-2c=(\cos\zeta+\cos4\zeta)^2-2c$

$$=\cos^2\zeta+\cos^2 4\zeta+2\cos\zeta\cos4\zeta-2c$$

$$=\frac{1+\cos2\zeta}{2}+\frac{1+\cos8\zeta}{2}+\cos5\zeta+\cos3\zeta-2c$$

$$=1+b/2-c$$

以上により

$$\cos\frac{360^\circ}{17}=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$$

これにより正 17 角形の作図の可能性が証明された。

＜ＱＥＤ＞

(5)　指数の拡張

□の中に数字を入れる。

×9	×9	×9	×9		×9		×9	
1/729	1/81	1/9	1	3	9	27	81	729
$9^{\square}$	$9^{\square}$	$9^{\square}$	9^0	$9^{1/2}$	9^1	$9^{3/2}$	9^2	9^3
			27^0	$27^{\square}$	$27^{\square}$	27^1		

演習１　用紙サイズの A0 は辺の比が１：$\sqrt{2}$ で面積が１ m^2 である。そして A1,A2,…と数字が１増える毎に、相似で面積が 1/2 になっていく。サイズ A5 の教科書の縦横の長さは何 cm か。

演習２　地震のエネルギーE(J)は、E＝$2.0\times10^{4.5}\times10^{1.5M}$（M は Magnitude）である。Magnitude が 1 増えると $10^{1.5}＝10\sqrt{10}$ ＝約 31.62 倍になる。なお広島の原爆は８×10^{13} J で約M６、10Mt クラスの水爆は 4×10^{16} J で約M8 に相当する。次の地震は広島の原爆の約何倍であったか。ただし $10^{0.1}$＝約 1.26 とせよ。
なお気象庁発表の Magnitude は日本独自の値で、世界標準は Moment Magnitude である。

年月日	1891. 7.21	1923.9.1	1993. 7.13	1995. 1.17	2004.10.23
地 震 名	濃尾大地震	関東地震	北海道南西沖地震	兵庫県南部地震	新潟県中越地震
M	8.4	7.9	7.8	7.3	6.8

(注)　スマトラ沖地震('04.12.03)の場合は M9.0

(5) 対数

対数 a ＞0, a ≠1 で M＞0 のとき

$$M=a^{p} \Longleftrightarrow \log_a M=p$$

2^{10}=1024　10^3　　従って　2　$10^{3/10}$ ＝$10^{0.3}$　　∴　$log_{10}2$　0.3

3^{21}=10460353203　10^{10}　　従って　3　$10^{10/21}$＝$10^{0.4761\cdots}$　　∴　$log_{10}3$　0.476…

5^{10}＝9765625　10^7　　従って　5　$10^{7/10}$ ＝$10^{0.7}$　　∴　$log_{10}5$　0.7

7^{71}　10^{60}　　従って　7　$10^{60/71}$＝$10^{0.8450\cdots}$　　∴　$log_{10}7$　0.845…

演習１　10 から 30 までの素数についてその常用対数の概数値を求めよ。

（ヒント 11^{25},13^9,17^{13},19^{18},23^{36},29^{13} の値を利用）

4＝2^2　$(10^{0.3})^2$＝$10^{0.6}$　　∴　$log_{10}4$　0.6

5＝10/2　$10/10^{3/10}$＝$10^{1-0.3}$＝$10^{0.7}$　　∴　$log_{10}5$　0.7

6＝2×3　$10^{0.3}\times10^{0.476\cdots}$＝$10^{0.776\cdots}$　　∴　$log_{10}6$　0.776…

演習２　30 までの自然数についてその常用対数の概数値をもとめよ。（ヒント素因数分解）

演習３　新聞紙 1 枚の厚さは約 0.05mm である。それを真ん中で半分に切って重ねることが何回でも繰り返せるとする。そこで重ねた新聞紙の厚さが地球から太陽まで距離 1.5×10^{8} km を超えるためには一体全体何回繰り返せばよいか。(答　52 回以上)

演習４　細胞分裂の分裂から次の分裂までの時間を世代という。この時間は温度や栄養などの環境条件の影響が大きいが、最適な条件下での１世代は原核細胞(マイコプラズマやバクテリア類)では約 20 分である。人は約 70 兆個の細胞からなっているとして、最適な条件下では原核細胞が１個から 70 兆個になるまでに凡そ何時間掛かるか。さらに始め 1000 個あったとすると 70 兆個になるまでに何時間掛かるか。(ただし対数の値は上を参考にする。)
(答　1 個から 70 兆個になるのに約 15 時間 23 分。また 1000 個から 70 兆個となるには約 12 時間 3 分。)