

二項定理からほんの少し発展させた授業展開

岐阜市立岐阜商業高等学校

1. 授業のきっかけと期待すること

本校で使用している教科書は、平均的な教科書に比べて取りあげられていない内容が結構あります。「パスカルの三角形」もその1例ですが、「パスカルの三角形」の持つ性質を見つけようという試みが、きっかけです。シンプルな図で見やすいせいか、予想以上に生徒が関心を示してくれたので、欲張ってよく知られている「最短経路の個数」との関係についても考察することにしました。

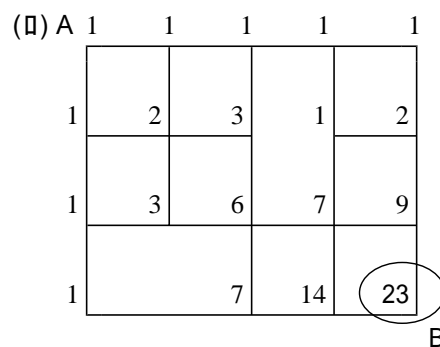
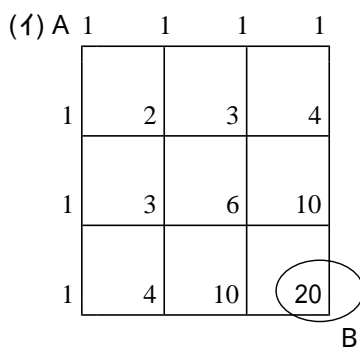
「パスカルの三角形」や「最短経路の個数」は、論理的な裏付けが充分でなくても、数学的性質や関係を目で追うことが可能な例だと思います。この授業を通して、数学の「面白さ」「不思議さ」等を生徒が少しでも感じてくれたら、と期待して授業を行いました。

2. 授業内容及び生徒の反応

(0) 既に学習している内容について

最短経路の個数（地点Aから地点Bへ）

順列や組合せについて学習する前に、数えあげの問題として扱いました。



順列の計算

・円順列

組合せの計算

・同じものを含む順列 ×
・重複組合せ ×

二項定理

・パスカルの三角形 ×

(注) は教科書で扱われている内容を、
×は扱われていない内容を示す。

(1) パスカルの三角形について (Step 1)

次の図のように2項係数を1から順に並べて、直角三角形型のパスカルの三角形を紹介しました。Step 1の目標は、この図を用いてパスカルの三角形の性質を探すことにあります。取り組みやすい内容ということもあって、反応もよく、活発に活動ができました。感想からも読み取れますがシンプルな図の中に、予想外に多くの性質があることを知り、多くの生徒は驚いていました。特に性質(6)については、「オッ」という歓声が起こりました。「すごい」「きれい」「びっくり」「奥が深い」「面白い」「楽しい」などの表現からもわかるように、結構、興味を持って授業に取り組んでくれたようです。生徒が見つけた性質及び感想は、図下にある通りです。

	1 (便宜的に)								
a+b	1	1							
(a+b) ²	1	2	1						
(a+b) ³	1	3	3	1					
(a+b) ⁴	1	4	6	4	1				
(a+b) ⁵	1	5	10	10	5	1			
(a+b) ⁶	1	6	15	20	15	6	1		
(a+b) ⁷	1	7	21	35	35	21	7	1	
	·	·	·	·	·	·	·	·	·

生徒が見つけた性質 (翻訳してます。)

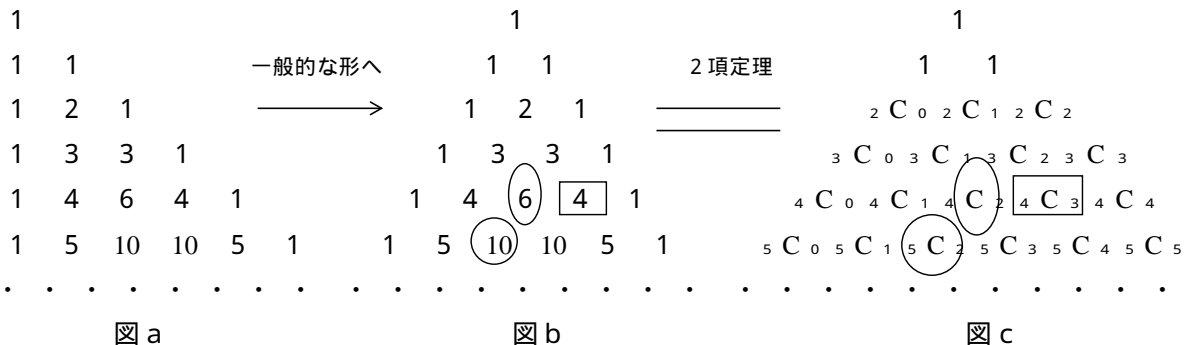
- (1) 左右対称である。
 - (2) 数列 $1, 1, 1, \dots$ は、各項が1の数列である。
 - (3) 数列 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ は、自然数の数列である。
 - (4) 縦の各数列について、左手前にある数列の第2項以降が階差数列になっている。
(例えば、数列 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ の第2項以降が数列 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ の階差数列になっている。)
 - と(5) 数列 $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ は、三角数(ボ-リングのピン)の数列である。
 - (6) 1以外の数は、上の数と左上の数の和に等しい。
 - (7) n行目の数の和は、 2^{n-1} に等しい。
 - と(8) 2~5行目の各行に並んでいる数を1つの数字として見ると、 $11, 11^2, 11^3, 11^4$ である。
 - (9) 右下がりの各数列($1, 2, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ など)について、初項から順に加えていくと、その和は最後に加えた数のすぐ下にある数に等しい。
- (注)「 11^n 」の付いた性質は、すべて性質(6)に帰着されます。また、「 11^n 」の付いた性質は、私の問いかけに対して、出てきたものです。

生徒の感想 1

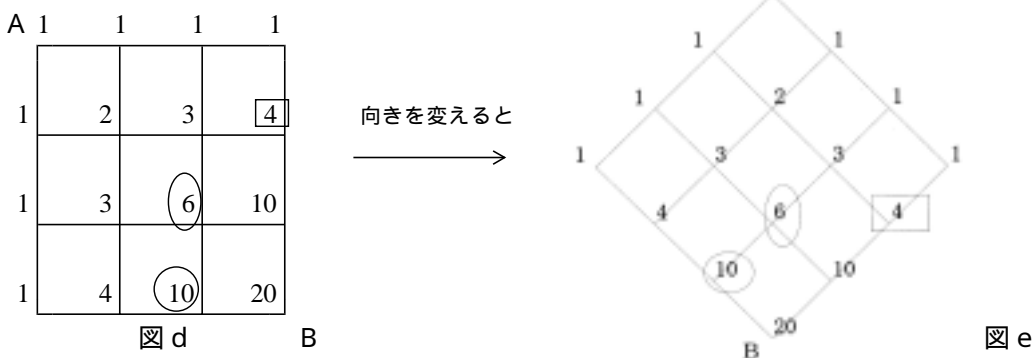
- ・色々な規則で数字が構成されていて、すごいと思いました。
- ・すごくきれいに法則が成り立っているので、すごいと思いました。
- ・そんなにはないと思っていたけど、聞いていると色々な性質が出てきて、見てみると本当に成り立っていることがわかり、ビックリです!!
- ・色々な性質があって、気付いた人はすごいと思った。性質は、奥が深くて探るのが面白い。
- ・法則を使うと、見えてないところまで数があった。
- ・難しい。他にいったいいくつの性質があるのだろう。
- ・性質(6)に気付いたM君に驚いたし、その性質にも驚かされた。少し数学が面白いと思った。
- ・こういったところが、数学の楽しいところなのかもしれない。
- ・こんなに多くの性質があるのには、ビックリした。結構楽しかった。もっと数を増やしたりすれば、たくさん性質が見つかるだろうと思った。
- ・最初は「なんだこりゃ」と思ったけど、いろんな視点から見ると、いろんな法則や性質があってびっくりした。

(2) 最短経路の個数とパスカルの三角形の関係について (Step 2)

<パスカルの三角形>

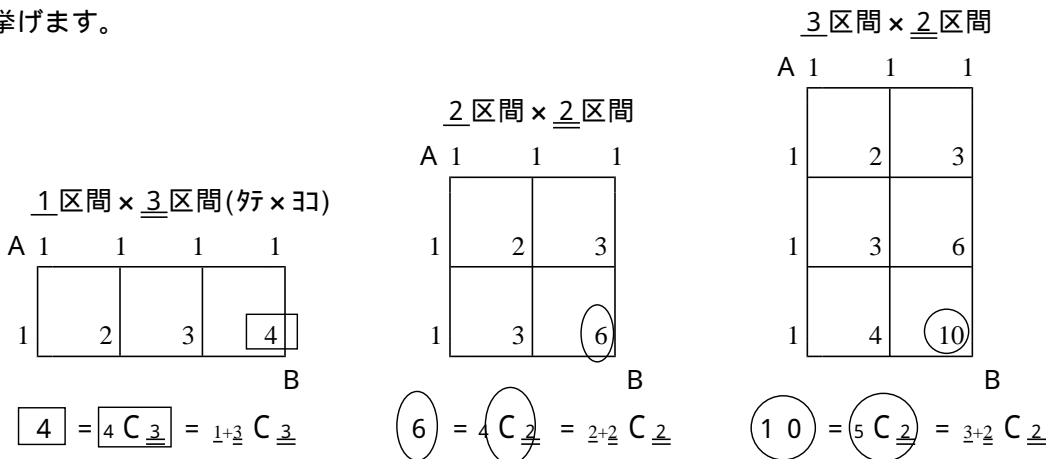


<最短経路の個数>



Step 2の目標は、パスカルの三角形(図 a)と最短経路の個数(図 d)との間にある関係を調べることにあります。まず、私の方から図 bを紹介しました。「図 dを 図 eのように見直せばよい」という発想が生徒の方から自然に出ることは、容易に想像できると思います。実際、図 bと 図 eを見比べると、最短経路の個数の配置が、パスカルの三角形を構成している数の配置と全く同じものであることがわかります。(なぜかという説明はしていません。)従って、図 cとの比較により、最短経路の個数が組合せの計算によって求められることもわかります。

例を挙げます。



これらの例から、最短経路の個数を求める式が、よく知られている ${}_{1+n}C_n$ の形で与えられることも容易に予測できます。

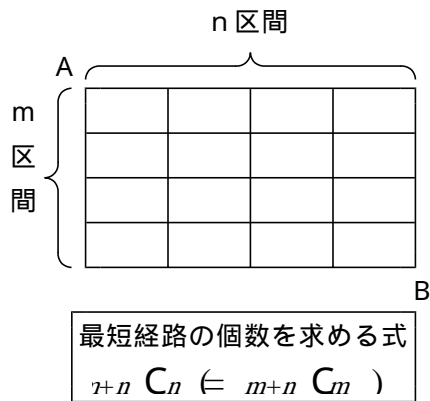
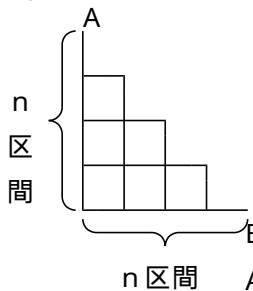


図 a と図 d の直接の比較から ${}_{m+n}C_n$ を予測することは可能ですが、生徒にとっては、図 b (即ち図 c) と図 e を経由した方が見やすいようです。最短経路の個数とパスカルの三角形の関係については「すげーっ」「思いもよらなかった」「びっくりした」「不思議」「ちょっとした発見だった」という感想からもわかるように、生徒にとっては、予想外の展開だったようです。また、Step 1 に比べると「難しい」「難しすぎた」という感想が多かったと思います。できるだけ論理的な説明を避けて、視覚による授業展開を心掛けましたが、その結果を反映している感想だと思います。

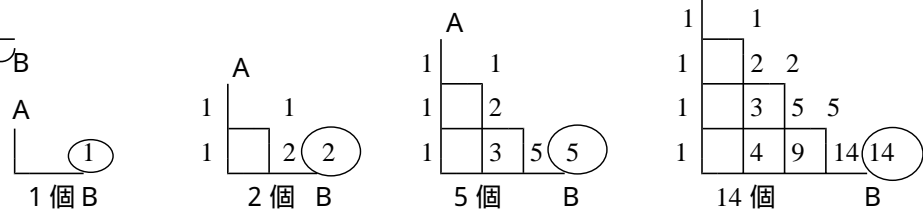
生徒の感想 2

- ・パスカルの三角形は、いろんな事に使えて「すげーっ」。
- ・最短経路の個数とパスカルの三角形が関係あるとは、思いもよらなかった。すごいと思った。
- ・最初はよくわからなかったけど、やっていくうちにわかってきた気がした。
- ・授業が楽しかったです。でも、不思議な感じです。
- ・今日は、久しぶりに授業に参加しました。不思議なことばかりだったけど、たくさん発言できました。数学は、奥が深い。
- ・いろんな関係がわかってくると、難しそうなお題でも楽しく簡単にできることがわかった。
- ・最短経路の個数を求める方法は、たぶんまだあると思うので見つけてみたい。
- ・説明を聞いて理解できたけど、考え方が難しい。
- ・最短経路の個数の計算は、ちょっとした発見だった。面白かった。でも、後半の話は、自分には難しすぎた。

(3) 直角二等辺三角形型の最短経路の個数は $\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$ (カタラン数のこと)



左図において、地点 A から地点 B への最短経路の個数を考えます。まず、 $n = 1, 2, 3, 4$ の場合について計算してみると



$n = 1, 2, 3, 4$ として、 n 区間 \times n 区間 (正方形型) の最短経路の個数と比べてみると、 $n = 1$

n	正方形型	三角形型
1	2	1
2	6	2
3	20	5
4	70	14
⋮	⋮	⋮

のときは $1/2$ 倍に、 $n = 2$ のときは $1/3$ 倍に、 $n = 3$ のときは $1/4$ 倍に、 \dots となっていることがわかります。従って、 n 区間の直角二等辺三角形型の最短経路の個数を求める式は、 $\frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$ となることが予測できます。一般には、 ${}_n C_n - {}_{2n} C_{n-1}$ という計算によって求めることができます。