

「異なるn個から2個を取り出す組合せ」のパターン配列について

岐阜県立中濃西高等学校

1. 研究のきっかけ

本校では今年度から名列表が男女混合名簿に変わり、出席番号順に当番のペアを作ると、男子同士とか女子同士とかになるとは限らない状態になりました。そこで、とりあえず「1と2」、「3と4」、「5と6」…(数字は出席番号を表す)のようにペアを作って、当番の仕事をスタートさせました。

しかし、クラス生徒人数が38人だったために20日目に元に戻ってしまうことがわかり別のペアを組むことにしました。(「1と3」「2と4」…のように)そしてこの先「ペアを組む相手が毎日異なる(クラスの全生徒がクラスの全員とペアを組む)」数え上げ方はないかを考えることとなりました。また、できる限り「配列のメンバーがだれも連続しない(二日連続で当番をやることのない)」形にする必要があることも考慮することにしました。

2. 問題の本質

通常の数学の問題では、「異なるn個から2個を取り出す組み合わせは何通りあるか」を尋ね、 ${}_nC_2$ の値を答えることのみが中心である。そして、その組合せを実際に列記させることもあるが、そのペアの配列の仕方は、

{p,q}(ただし $p \leq q$)の形で並べ、{1,2},{1,3},…,{1,n},{2,3},…,{2,n},{3,4},…,{3,n},…,{n-1,n}

のようにかくのが通例である。

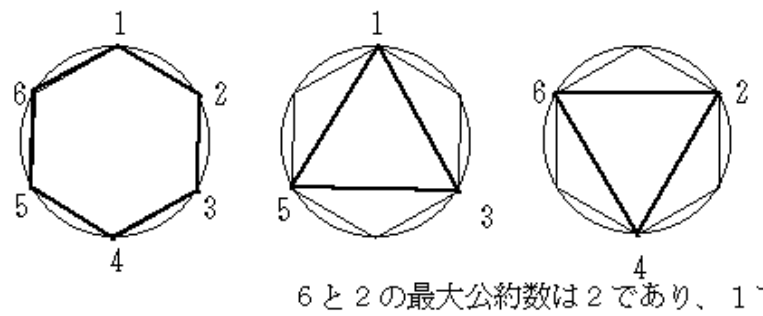
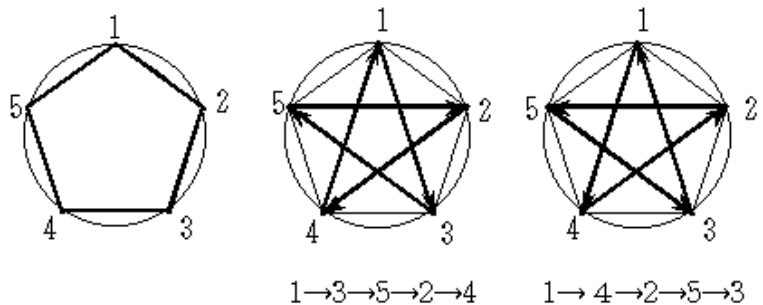
しかし、この書き表し方(数え上げ方)だと、上記の「配列メンバーのうちのだれもが連続しない」ことに適合しないので、そうならないような「パターン配列」を考えることが今回のテーマということになる。

3. 実際の配列

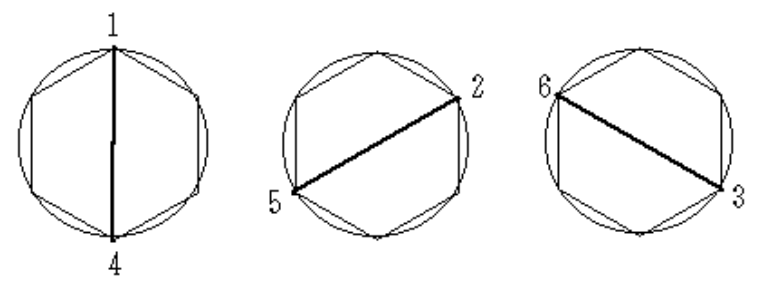
そこで、一つおき、二つおき、三つおき、…ということを一番の生徒からはじめていくということを順番にやっていくという方法をとることにした。 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots$ 、 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow \dots$ 、 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow \dots$ 、 $1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow \dots$ 、そして最後は $1 \rightarrow 20$ 、…であり、「人数の半分(今回は19)おき」までをやれば十分であることは明らかである。

みなさんよくご存じのように、全体の人数(n)と、いくつおきに数字を動かすかというその数字(m)について、「nとmが互いに素である場合には最終的に全ての数字の上を巡る」が、「そうでない場合は登場してこない数字がある」ことが成り立つ。後者の場合は、ひととおり終わった後、とばされて登場してこない数字から(1番の生徒からやった操作と)同様の作業を繰り返す必要がある。「 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow \dots$ 」のあとの「 $2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow \dots$ 」などである。今回の例だと $38 = 2 \times 19$ なので、偶数おきに数字を動かしたときと19おきに数字を動かしたときにこの操作が必要になる。

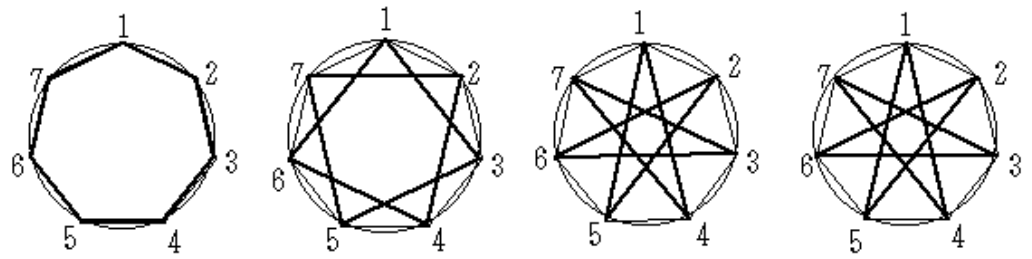
ただし、2つ毎に進む場合だと、「1と3」、「3と5」…という具合になるが、二日連続で当番をやらないという方針にすると、「1と3」、「5と7」…という形にする必要がある。



6と2の最大公約数は2であり、1ではない。



6と3の最大公約数は3であり、1ではない。



1→3→5→7→2→4→6 1→4→7→3→6→2→5 1→5→2→6→3→7→4

(7と2、7と3、7と4 は、いずれも互いに素)

n=4		
通常	連続	非連続
1 2	1 2	1 2
1 3	2 3	3 4
1 4	3 4	2 3
2 3	4 1	4 1
2 4	1 3	1 3
3 4	2 4	2 4

n=5		
通常	連続	非連続
1 2	1 2	1 2
1 3	2 3	3 4

n=7		
通常	連続	非連続
1 2	1 2	1 2
1 3	2 3	3 4
1 4	3 4	5 6
1 5	4 5	7 1
1 6	5 6	2 3
1 7	6 7	4 5
2 3	7 1	6 7
2 4	1 3	1 3
2 5	3 5	5 7
2 6	5 7	2 4
2 7	7 2	6 1
3 4	2 4	3 5

n=9		
通常	連続	非連続
1 2	1 2	1 2
1 3	2 3	3 4
1 4	3 4	5 6
1 5	4 5	7 8
1 6	5 6	9 1
1 7	6 7	2 3
1 8	7 8	4 5
1 9	8 9	6 7
2 3	9 1	8 9
2 4	1 3	1 3
2 5	3 5	5 7
2 6	5 7	9 2

1	4	3	4	5	1
1	5	4	5	2	3
2	3	5	1	4	5
2	4	1	3	1	3
2	5	3	5	5	2
3	4	5	2	4	1
3	5	2	4	3	5
4	5	4	1	2	4

3	5	4	6	7	2
3	6	6	1	4	6
3	7	1	4	1	4
4	5	4	7	7	3
4	6	7	3	6	2
4	7	3	6	5	1
5	6	6	2	4	7
5	7	2	5	3	6
6	7	5	1	2	5

2	7	7	9	4	6
2	8	9	2	8	1
2	9	2	4	3	5
3	4	4	6	7	9
3	5	6	8	2	4
3	6	8	1	6	8
3	7	1	4	1	4
3	8	4	7	7	1
3	9	7	1	4	7
4	5	2	5	2	5
4	6	5	8	8	2
4	7	8	2	5	8
4	8	3	6	3	6
4	9	6	9	9	3
5	6	9	3	6	9
5	7	1	5	1	5
5	8	5	9	9	4
5	9	9	4	8	3
6	7	4	8	7	2
6	8	8	3	6	1
6	9	3	7	5	9
7	8	7	2	4	8
7	9	2	6	3	7
8	9	6	1	2	6

【参考】

コート2面を使用して
5チームが合同練習
をするときの対戦表

1	2	3	4
5	1	2	3
4	5	1	3
5	2	4	1
3	5	2	4

n=8		
通常	連続	非連続
1 2	1 2	1 2
1 3	2 3	3 4
1 4	3 4	5 6
1 5	4 5	7 8
1 6	5 6	2 3
1 7	6 7	4 5
1 8	7 8	6 7
2 3	8 1	8 1
2 4	1 3	1 3
2 5	3 5	5 7
2 6	5 7	3 5
2 7	7 1	7 1
2 8	2 4	2 4
3 4	4 6	6 8
3 5	6 8	4 6
3 6	8 2	8 2
3 7	1 4	1 4
3 8	4 7	7 2
4 5	7 2	5 8
4 6	2 5	3 6
4 7	5 8	4 7
4 8	8 3	2 5
5 6	3 6	8 3
5 7	6 1	6 1
5 8	1 5	1 5
6 7	2 6	2 6
6 8	3 7	3 7
7 8	4 8	4 8

n=6		
通常	連続	非連続
1 2	1 2	1 2
1 3	2 3	3 4
1 4	3 4	5 6
1 5	4 5	2 3
1 6	5 6	4 5
2 3	6 1	6 1
2 4	1 3	1 3
2 5	3 5	5 1
2 6	5 1	3 5
3 4	2 4	2 4
3 5	4 6	6 2
3 6	6 2	4 6
4 5	1 4	1 4
4 6	2 5	2 5
5 6	3 6	3 6

4. 従来の場合

従来(男女別名簿)の場合であれば、男子20名と女子18名について、男子と女子のペアをすべて作り、そのペアで当番をやらせる形にしたと思われる。その数は、 $20 \times 18 = 360$ である。

(男子どうしや女子どうしのペアは作らない。)

今回の場合でも、クラス内で男女別名簿を作り、上記のように「男子と女子の当番のペア」を作るのであれば、それはそれでよかったのだが、男子の△番・女子の▽番のような番号を、本来の出席番号とは別に作らなければならないため煩雑になるのでやめることにした。

5. 3年間クラス替えのない理数科

${}_{38}C_2 = 38 \cdot 37 \div 2 = 703$ なので、1年間すなわち 175日(≒5日/週×約35週)では全ての場合を尽くさないうちに年度末を迎えてしまうが、翌年度以降に持ち越すことにすれば、3年間でほぼ全員の生徒が、全ての生徒とペアをくむことができることになる。

+1		+1		+2		+2		+3		+3		+4		+4		+5		+5		+6		+6	
1	2	2	3	1	3	2	4	1	4	4	7	1	5	2	6	1	6	6	11	1	7		
3	4	4	5	5	7	6	8	7	10	10	13	9	13	10	14	11	16	16	21	13	19	14	14
5	6	6	7	9	11	10	12	13	16	16	19	17	21	18	22	21	26	26	31	25	31	20	20
7	8	8	9	13	15	14	16	19	22	22	25	25	29	26	30	31	36	36	3	37	5	38	38
9	10	10	11	17	19	18	20	25	28	28	31	33	37	34	38	3	8	8	13	11	17	15	15
11	12	12	13	21	23	22	24	31	34	34	37	3	7	4	8	13	18	18	23	23	29	24	24
13	14	14	15	25	27	26	28	37	2	2	5	11	15	12	16	23	28	28	33	35	3	30	30
15	16	16	17	29	31	30	32	5	8	8	11	19	23	20	24	33	38	38	5	9	15	10	10
17	18	18	19	33	35	34	36	11	14	14	17	27	31	28	32	5	10	10	15	21	27	25	25
19	20	20	21	37	1	38	2	17	20	20	23	35	1	36	2	15	20	20	25	33	1	34	34
21	22	22	23	3	5	4	6	23	26	26	29	5	9	6	10	25	30	30	35	7	13	8	8
23	24	24	25	7	9	8	10	29	32	32	35	13	17	14	18	35	2	2	7	19	25	20	20
25	26	26	27	11	13	12	14	35	38	38	3	21	25	22	26	7	12	12	17	31	37	33	33
27	28	28	29	15	17	16	18	3	6	6	9	29	33	30	34	17	22	22	27	5	11	0	0
29	30	30	31	19	21	20	22	9	12	12	15	37	3	38	4	27	32	32	37	17	23	18	18
31	32	32	33	23	25	24	26	15	18	18	21	7	11	8	12	37	4	4	9	29	35	30	30
33	34	34	35	27	29	28	30	21	24	24	27	15	19	16	20	9	14	14	19	3	9	4	4
35	36	36	37	31	33	32	34	27	30	30	33	23	27	24	28	19	24	24	29	15	21	10	10
37	38	38	1	35	37	36	38	33	36	36	1	31	35	32	36	29	34	34	1	27	33	28	28

MOD(B19,38)+1

MOD(G20+1,38)+1

MOD(M20+2,38)+1

MOD(V20+3,38)+1

+7		+7		+8		+8		+9		+9		+10		+10		+11		+11		+12		+12	
1	8	8	15	1	9	2	10	1	10	10	19	1	11	2	12	1	12	12	23	1	13		
15	22	22	29	17	25	18	26	19	28	28	37	21	31	22	32	23	34	34	7	25	37	20	20
29	36	36	5	33	3	34	4	37	8	8	17	3	13	4	14	7	18	18	29	11	23	15	15
5	12	12	19	11	19	12	20	17	26	26	35	23	33	24	34	29	2	2	13	35	47	30	30
19	26	26	33	27	35	28	36	35	6	6	15	5	15	6	16	13	24	24	35	21	33	25	25
33	2	2	9	5	13	6	14	15	24	24	33	25	35	26	36	35	8	8	19	7	19	8	8
9	16	16	23	21	29	22	30	33	4	4	13	7	17	8	18	19	30	30	3	31	43	33	33
23	30	30	37	37	7	38	8	13	22	22	31	27	37	28	38	3	14	14	25	17	29	18	18
37	6	6	13	15	23	16	24	31	2	2	11	9	19	10	20	25	36	36	9	3	15	4	4
13	20	20	27	31	1	32	2	11	20	20	29	29	1	30	2	9	20	20	31	27	39	28	28
27	34	34	3	9	17	10	18	29	38	38	9	11	21	12	22	31	4	4	15	13	25	14	14
3	10	10	17	25	33	26	34	9	18	18	27	31	3	32	4	15	26	26	37	37	49	38	38
17	24	24	31	3	11	4	12	27	36	36	7	13	23	14	24	37	10	10	21	23	35	24	24
31	38	38	7	19	27	20	28	7	16	16	25	33	5	34	6	21	32	32	5	9	21	10	10
7	14	14	21	35	5	36	6	25	34	34	5	15	25	16	26	5	16	16	27	33	45	34	34
21	28	28	35	13	21	14	22	5	14	14	23	35	7	36	8	27	38	38	11	19	31	20	20
35	4	4	11	29	37	30	38	23	32	32	3	17	27	18	28	11	22	22	33	5	17	0	0
11	18	18	25	7	15	8	16	3	12	12	21	37	9	38	10	33	6	6	17	29	41	30	30
25	32	32	1	23	31	24	32	21	30	30	1	19	29	20	30	17	28	28	1	15	27	10	10

+13		+13		+14		+14		+15		+15		+16		+16		+17		+17		+18		+19	
1	14	14	27	1	15	2	16	1	16	16	31	1	17	2	18	1	18	18	35	1	19		
27	2	2	15	29	5	30	6	31	8	8	23	33	11	34	12	35	14	14	31	37	17	38	
15	28	28	3	19	33	20	34	23	38	38	15	27	5	28	6	31	10	10	27	35	15	39	
3	16	16	29	9	23	10	24	15	30	30	7	21	37	22	38	27	6	6	23	33	13	40	
29	4	4	17	37	13	38	14	7	22	22	37	15	31	16	32	23	2	2	19	31	11	41	
17	30	30	5	27	3	28	4	37	14	14	29	9	25	10	26	19	36	36	15	29	9	42	
5	18	18	31	17	31	18	32	29	6	6	21	3	19	4	20	15	32	32	11	27	7	43	
31	6	6	19	7	21	8	22	21	36	36	13	35	13	36	14	11	28	28	7	25	5	44	
19	32	32	7	35	11	36	12	13	28	28	5	29	7	30	8	7	24	24	3	23	3	45	
7	20	20	33	25	1	26	2	5	20	20	35	23	1	24	2	3	20	20	37	21	1	46	
33	8	8	21	15	29	16	30	35	12	12	27	17	33	18	34	37	16	16	33	19	37	47	
21	34	34	9	5	19	6	20	27	4	4	19	11	27	12	28	33	12	12	29	17	35	48	
9	22	22	35	33	9	34	10	19	34	34	11	5	21	6	22	29	8	8	25	15	33	49	
35	10	10	23	23	37	24	38	11	26	26	3	37	15	38	16	25	4	4	21	13	31	50	
23	36	36	11	13	27	14	28	3	18	18	33	31	9	32	10	21	38	38	17	11	29	51	
11	24	24	37	3	17	4	18	33	10	10	25	25	3	26	4	17	34	34	13	9	27	52	
37	12	12	25	31	7	32	8	25	2	2	17	19	35	20	36	13	30	30	9	7	25	53	
25	38	38	13	21	35	22	36	17	32	32	9	13	29	14	30	9	26	26	5	5	23	54	
13	26	26	1	11	25	12	26	9	24	24	1	7	23	8	24	5	22	22	1	3	21	55	