平成 15 年度　岐阜県高等学校教育課程研究集会 (数学部会）発表要綱

平均値の定理と Taylor 展開

岐阜県立可児高等学校

1　はじめに

高校教師として数学を教えるようになり常に考え、意識していることがある。それは、分かりやすい授業を構成するだけでなく、「数学はすごい！」「数学を学びたい！」と生徒が思ってくれるようなものにしていきたいということである。すべての生徒がそのような感情をもつことは難しいことであるが、何人かの生徒の心の中で眠っているそういった感情を目覚めさせることはできるはずである。私自身が数学を学び、数学を通して得た知識・技能は大きな力だと感じるからこそ、このような考えをもったのである。そしてなにより、楽しい学問であると感じるからである。

2　学校の概要

可児高等学校は昭和 55 年に創立され、開校以来、希望する進路が達成できる学校を目指して取り組んでいる。普通科各学年９クラスで、２年生から文系・理系に分かれる。本校の生徒の学力差は入学当時から大きく、習熟度クラスを１年生で３クラス、２、３年生で４クラス編成している。生徒は授業を熱心に取り組み、それが可児高校の原動力となっている。また、自宅学習の習慣を付けさせるように学校全体で働きかけている。

２・３年生の文理クラス数		
学年	文系	理系
２年生	5（うち習熟度クラス 2）	4（うち習熟度クラス 2）
３年生	4（うち習熟度クラス 2）	5（うち習熟度クラス 2）

3　研究内容

3.1　研究テーマ設定理由

——「数学を学びたい」と一人でも多くの生徒に思ってもらいたい——　これが前提にあった。各分野の中でそう感じさせられるのではないかと思う内容は多々あるが、逆に、生徒が「なぜこんなことをやらないといけないのか」とか、「この概念は何に発展するの」と思ってしまう内容もいくつかある。その、一つが「平均値の定理」ではないだろうか。数学の中で平均値の定理は関数値の増減を調べる [1] 上で有効であるが、その後、いくつかの問題 [2] に利用できるもののその先には姿を現さな

[1] 関数 $f(x)$ は、$[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能とする。平均値の定理より、$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ である任意の x_1、x_2に対して、

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \qquad (x_1 < c < x_2)$$

となる c が存在する。このとき、

$f'(c) > 0$ ならば、$f(x_1) < f(x_2)$　即ち、$f(x)$ は $x_1 \leqq x \leqq x_2$の範囲で単調増加

$f'(c) < 0$ ならば、$f(x_1) > f(x_2)$　即ち、$f(x)$ は $x_1 \leqq x \leqq x_2$の範囲で単調減少

が成り立つ。

[2] 例えば、「$a > 0$ のとき、$\dfrac{1}{a+1} < \log(a+1) - \log a < \dfrac{1}{a}$が成り立つことを証明せよ」

い。しかし、数学全般において平均値の定理は大変重要であり、かつ、様々な定理につながる概念である。そうであるにもかかわらず、高校でこれを学び「すごい定理だな」とか、「こんな利用の仕方があるのかー」と感じるにはやや説明不足ではないだろうか。やはり、教科書[3]の発展として紹介されているように「Taylor 展開」を生徒に伝えることは大切であると感じる。もちろん、すべての生徒に伝えることは難しいと思うが、本校の理系習熟度クラスのような生徒には必要であろう。このような考えから平均値の定理の指導後、その発展である Taylor 展開を利用した授業を実践してみた。

3.2 Taylor 展開

Taylor 展開は高校数学の範囲を超えてはいるが、教科書には第 n 次導関数の応用として紹介されている。もちろん厳密な証明はない。今回は平均値の定理のつながりで生徒に紹介をしてみた。

Taylor の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で n 回微分可能な関数ならば、次の条件を満たす c が存在する。

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\dots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{(n-1)}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \quad (a<c<b)$$

Maclaurin の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[0,b]$ で n 回微分可能な関数ならば、$0 \leqq x \leqq b$ に対して次の条件を満たす c が存在する。

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots$$
$$\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \quad (0<c<b)$$

Maclaurin の定理が意味することは、関数 $f(x)$ の大域的な動きが、$f(x)$ の原点 O における高階導関数 (即ち、関数 $f(x)$ の局所的な動き) によって求められるということである。しかし、注意すべきは最後の項に表れる c が、x と n によって決まる数であって一般的に表現することは難しいということである。また、$n\to\infty$ としても同様に成立すると感じてしまうが、実際は強い条件が必要なのである。つまり、次の Taylor 展開である。

Taylor(Maclaurin) 展開

関数 $f(x)$ が $-r<x<r$ を満たす x に対して何回でも微分可能で、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n=0$$

ならば、次が成り立つ。

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

[3] 数学　(啓林館) で Taylor 展開という言葉は出てこないが三角関数などが無限級数で表されることを紹介している。

さて、Taylor 展開を利用して馴染み深いいくつかの関数を無限級数で表してみる。このとき、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n = 0$$

となるかどうかを調べることは煩雑になるので省略した。例えば、$f(x) = \sin x$ について求めてみると、

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}k\right)$$

より、

$$f^{(k)}(0) = \sin\frac{\pi}{2}k$$

[4]よって、以下のように Taylor 展開できる。

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}\cdots$$

ところが、生徒は本当に $\sin x$ が上のような無限級数で表されるのかと疑問に思うだろう。　それで、無限級数の数項までをパソコン[5]を使いグラフに描いて、実際に $\sin x$ が多項式で近似されていく様子を示してみた。また、その様子が手元に残るようにプリントも用意した。[6]
次に、生徒自身に $\frac{1}{1-x}$、$\cos x$ と、e^x の Taylor 展開を求めさせた。

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}\dots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

そして、これらの結果から考察できることを考えさせ、以下のことを紹介した。

- $\dfrac{1}{1-x}$ の Taylor 展開の結果は、初項 1、公比 x(ただし $|x| < 1$) の無限等比級数と同じになること。
- $\sin x$、$\cos x$ の近似値は、これからは計算機で計算できること。(実際、関数電卓はこれで計算している。)
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ が確かに成り立っていること。
- $\sin x$、$\cos x$、e^x の Taylor 展開の右辺を微分すると、それぞれ $\cos x$、$-\sin x$、e^x の Taylor 展開に確かになっていること。
- e^x の式に $x = 1$ を代入すると、無理数 e がきれいな無限級数で表される。
  $e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dots$

また、Taylor 展開の話からはずれるけれど、興味付けのために $\sin x$、$\cos x$、e^x の Taylor 展開した結果を見比べて、次のような有名な関係式を発見させた。即ち、e^x の Taylor 展開の両辺に $x = ix$ を

[4]もちろん授業では第 1 次導関数から順に計算し、一般的な第 k 次導関数がそのようになることを導く。
[5]グラフ作成ソフト grapes を利用
[6]別ファイル Taylor2.pdf 参照

代入すると、

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + \frac{1}{1!}ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + i\Big(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\Big) \\
&= \cos x + i \sin x
\end{aligned}
$$

が得られる。さらに、新たに得た関係式の両辺に $x = \pi$を代入すると次のような美しい関係式が姿を現すことを伝えた。[7]

$$
e^{i\pi} = -1
$$

3.3 Taylor 展開の授業に対する生徒の反応

1. アンケートより

１．授業内容は難しかったですか？			
クラス	難しかった	どちらでもない	やさしかった
６組	31	7	0
１０組	28	10	0

２．数学に興味がわきましたか？			
クラス	興味がわいた	どちらでもない	わかなかった
６組	10	26	2
１０組	18	20	0

３．数学の面白さ、美しさ、奥深さが感じられましたか？			
クラス	感じられた	どちらでもない	感じられなかった
６組	22	14	2
１０組	23	13	2

４．今後もこのような授業を受けたいですか？			
クラス	受けたい	どちらでもない	受けたくない
６組	21	13	4
１０組	30	8	0

2. 感想より

- 数学ってすごいな！とは思ったけど、実際に自分でやるとなると大変そうで、なかなかやりたいとは思えませんでした。
- もう少し長く説明して欲しかった。
- 導入がいきなりだったので、少し授業の流れに乗れませんでした。
- 正直むずい！というか、昔の人はすごいなと思った。

[7] 数学において重要な数、即ち、円周率π、ネイピアの数 e、虚数単位 i、整数の単位元 1 が一つの関係式の中に姿を現している !!

- その場では分かった気がしたけど、数週間後に覚えている自信はない。
- 大学でやる授業は難しいと思った。
- 大学の授業にはついていけないのではと思った。
- やっている内容が難しいので、よく理解できずにどんどん進んでいってしまった。
- 難しくてよく分かりませんでした。
- 話を聞いていると分かるけど、いざ自分でやってみるのは難しかったです。
- 公式や定理を考える人ってすごいなーと感心しっぱなしです。
- $e^{i\pi} = -1$ は驚いた。i を二乗していないのに実数になっているところが不思議。じっくり考えてみたらすごいことだと分かりました。
- 理解するのは難しかったけど、それを分かろうとするのが面白かった。大学の先輩に、この問題を出したら見事答えてくれました。僕も大学でがんばろうと思った。
- $\sin x$、$\cos x$、e^xが多項式で表せるとは驚きました。
- 数学は奥がとても深いんだなーと思いました。
- e^xの式はすごくきれいで、おぉーって思いました。(e は無理数なのに $\cdots$)
- 真剣に聞けて、こういう授業もいいなと思いました。
- なんだかとてもすばらしい話でした。
- Taylor 展開にちょっと感動しました。美しいと思いました。
- かなり難しい内容であったので大学の数学はすごいと分かりました。でも数学は美しいということが分かってきました。
- こんな発想を思いつくとは、考えた人はとんでもないと思ったし、数学は奥が深いと思った。
- 感動しました。
- なんか楽しかった。またあーゆう授業して欲しいです。やる気が出るし、聞いていて楽しいです。
- 理学部でやることの一面を知ることができた気がした。自分は工学部志望なので今後の参考になった。
- 自分で考える時間もあって、楽しく授業を受けれた。
- 今日の授業はとても面白かったです。数学ってこんなに面白いのかって思えました。

4　研究を振り返って

平均値の定理に関わらず、あることを教えるとその後に広がる様々な話を生徒に伝えたくなるときは多々ある。しかし、それが生徒にとって有益なのか、生徒にとって理解を阻む元になりはしないか、時間がかかって授業の進度に影響しないか、などいろいろ考えて思いとどまることばかりだ。しかし、今回の実践を通じて、教科書の範囲を超えたとしても生徒の実態に合わせてそれが必要であるならば実践していくべきであると感じた。

1. アンケートから考察できること

- １に関して——予想された結果であったが難しく感じた生徒が多かった。しかし、1/4 の生徒のレベルにはあっていたようである。

- ２に関して——予想していたよりも興味をもった生徒が少なかった。１０組で興味をもった生徒が増えたのは、２回目の授業ということで展開がスムーズであったからではないだろうか。従って、授業の進め方次第ではもっと興味をひくことは可能であろう。
- ３に関して——興味をもつまではいかなくても、授業に対する好感をもつ生徒は半数以上いたようである。
- ４に関して——2/3 弱の生徒がこういった授業を受けたいと感じているので、内容や授業構成を工夫して所々にもりこんでいってよいのではないか。

2. 生徒の感想や反応から言えること

- 数学に対する意識の良い変化を与えることはできた。
  $\longrightarrow$ 今後も教科書の範囲外であっても工夫して授業に取り入れていきたい。
- 平均値の定理から Taylor 展開への発展に無理があるため、生徒にとってつながりが理解しずらかった。
  $\longrightarrow$ 時間をもう少しかけたほうが良いが、それでも理解することは難しいだろう。今後、Taylor 展開へ発展していく別の過程を実践していきたい。
- 平均値の定理をはじめ、内容をもう少し工夫するべきではないか。
  $\longrightarrow$ 平均値の定理を利用した問題を紹介し、この定理の活用方法を身に付けさせたり、Taylor 展開できない関数や、収束半径 $|x| < a$ をもつ関数を紹介していきたい。

生徒の反応はおおむね悪くはなかった。ただそれは、分かった気にさせただけ、驚きを感じさせただけであって真の理解には至っていない。それもそのはず、やはり高校生にとって Taylor 展開は難しい概念なのだ。私が今も悩んでいるのは、そのような難しい概念をところどころ省略しながら (ときにはそれが理論の主軸であることもある)、生徒がおぉーと感じてくれればそれで良しとしていいのか …。今後の課題である。

参考文献

[1] 高木貞二著、『解析概論』(岩波書店、1998 年)

[2] 岸正倫著、『微分積分学』(学術図書出版、1996 年)

[3] 志賀浩二著、『解析入門 30 講』(朝倉書店、2000 年)

[4] 山本芳彦編、『高等学校数学 III 改訂版』(啓林館、1999 年)

[5] 永倉安次郎著、『チャート式基礎からの数学 III+C』(数研出版、2001 年)

Typeset by LaTeX