平成１４年度　岐阜県高等学校数学教育研究会　研究発表会

「２次曲線の教材いろいろ」

岐阜県立本巣高等学校

１　本校の概要と生徒の実態

本校は、創立８２周年の歴史をもつ伝統校として地域の期待も大きい。普通科１７学級、家政科６学級の学校である。

現在、全校生徒９０６名で生徒の主な出身地域は、本巣郡４５％、揖斐郡１８％、岐阜市３３％である。普通科の生徒は、ほぼ全員が進学希望で、家政科も短大を主として７０％を越える生徒が進学を希望している。普通科は２年生から理系コースと文系コースに分かれ、さらに３年生から文系コースを文Ⅰ（国公立大希望者）と文Ⅱ（私立大希望者）に分けている。

生徒は、全体的に温和で素直であり、真面目に学習に取り組み、入学当初より強い進学希望をもっている。生徒たちの将来の進路目標を達成するために、本校では「品位と活力に満ちた生徒の育成」のもとに教科指導、特別活動の指導に力を入れてきた。しかしながら、生徒の多様化とともに、学習意欲と授業内容の格差が少しずつみられるようになってきた。

また、生徒いきいきプランによる単位制の導入などが、平成１６年度から実施されることになり新しい本巣高校の姿を模索中である。

２　テーマ設定の理由

数学Cを履修するのは３年の理系の２クラスである。授業で扱うのは行列と２次曲線の内容だけである。２次曲線は図形的な特徴を理解することが大切であるが、数Ⅱの「図形と方程式」で学んだ解析幾何学的な方法を習熟することであっさりと終わってしまうことが多い。

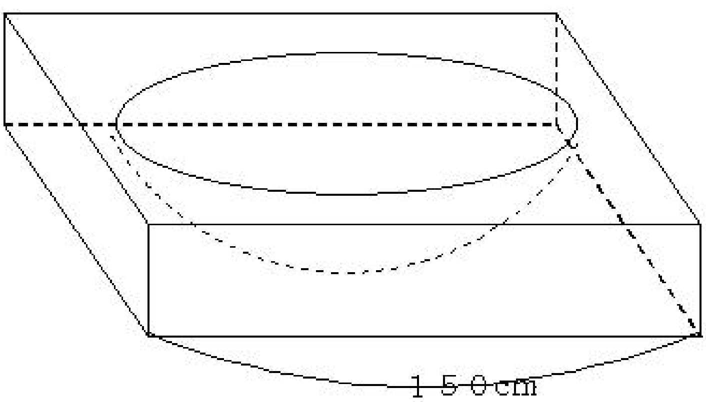
そこで、身近な例をとって観察、実験によって図形の特徴を体感し興味をもたせることにした。

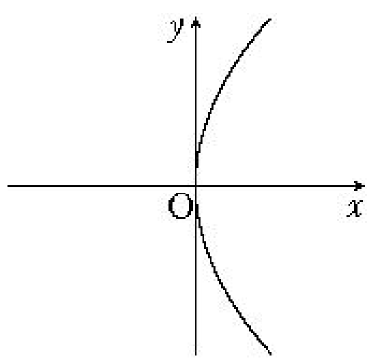
３　研究内容

Ⅰ　焦点の威力‥‥実験を通して、２次曲線の図形的な性質を調べる。

（１）ソーラーなべ（放物線 $y^2=200x$）

曲面からほぼ５０cmに焦点をもってくる。発砲スチロールを削って、放物面をつくる。表面にアルミシールを貼る。





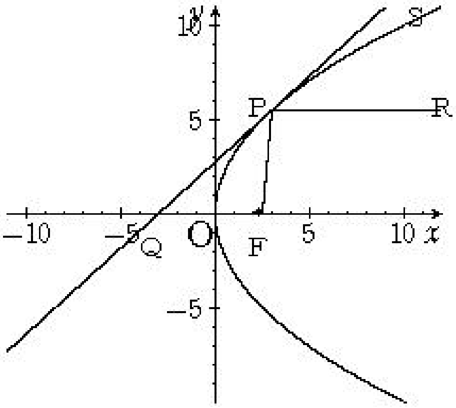
（実験）飯盒でご飯を炊く。

①太陽の方向にソーラーなべを固定する。

②飯盒が焦点にくるようにうまく吊す。このときくれぐれもサングラスをして焦点近くに決して顔を持っていかない。

③約１０分で沸騰する。それから２０分で炊きあがる。このスピードには驚きである。ガス･電気を使わずほぼ同じ時間で炊けることに感動、予想以上のパワーである。

（放物線の性質）



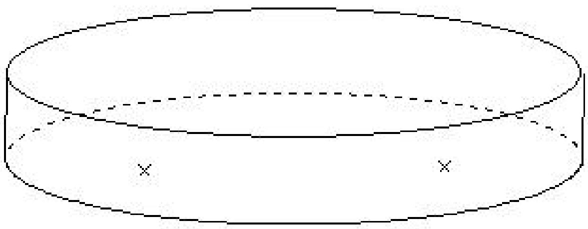
焦点をＦ、放物線上の点をＰとする。直線ＰＦとＰを通り、軸に平行な直線は点Ｐにおける接線と等しい角で交わる。

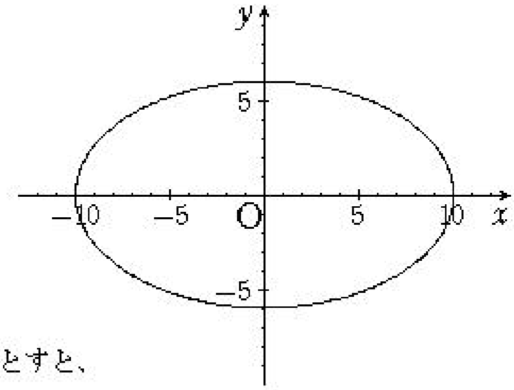
（証明の方針）

ＦＱ＝ＦＰを示し△ＦＰＱが二等辺三角形であることから

∠ＦＱＰ＝∠ＦＰＱ

（２）楕円の水槽

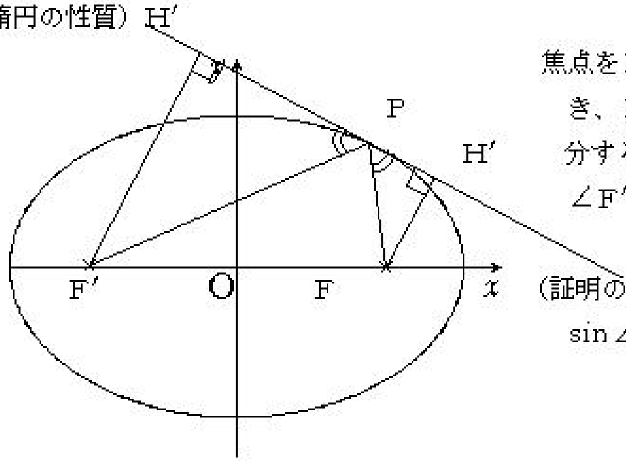




（実験）　波の動きを見る

５cmほど水をはり、片方の焦点にパチンコ玉を落とすと、その波がもう一つの焦点に集まる。

（楕円の性質）



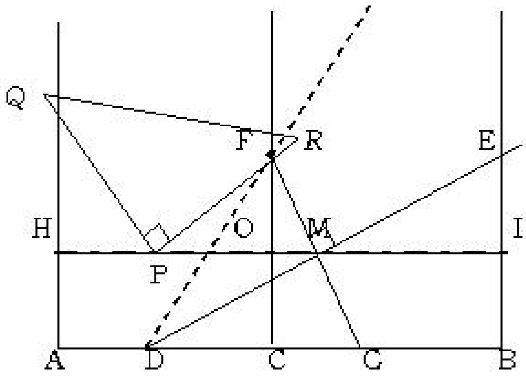
焦点をＦ、Ｆ′、楕円上の任意の点をＰとするとき、Ｐにおける接線は∠ＦＰＦ′の外角を二等分する。

∠Ｆ′ＰＨ′＝∠ＦＰＨ

（証明の方針）

sin∠FPH＝sin∠F′PH′を導く

Ⅱ　直線で描く２次曲線　　　半紙を折るだけで放物線が描く



線分ABの中点をＣとする。線分ＡＢの垂直二等分 線上に点Ｃの点Oの関して対称な点をFとする。

次に辺ABが点Fを通るように折り目DEをつける。このような折り目は無数にあるから、このことを何度も繰り返す。

折るかわりに三角定規を使って折り目をはっきりとひくこともできる。

折ったときに点Fと重なる点をGとする。線分FGの垂直２等分線が折り目DEである。線分FGの中点Mの軌跡は直線HIとなる。折れ線FMEに沿って三角定規を置けば、折り目DEが引ける。

∠P＝９０°の三角定規PQRを辺PQがFを通ってPをHI上にあてながら直線PQを引けば、それが折り目と一致する。

F（０，ｐ）、G（ｔ、－ｐ）とする。

直線DEは $y=\dfrac{t}{2p}x-\dfrac{t^2}{4p}$　となり、$t^2-2xt+4py=0$

$$D'=x^2-4py\geqq 0$$

境界線が放物線として決まる。

直線ABの替りに円を考えると、楕円や双曲線を描くことができる。円の内側に点Fがあるとき、円周と点Fが重なるように折ると楕円が得られ、円の外側に点Fがあるとき双曲線が得られる。

三角定規を用いて、円周上の点をGとすると、線分FGの中点Mの軌跡は円になる。∠P＝９０°の三角定規PQRを、Pが中点Mの軌跡上に、辺PRがFを通るように置いて辺PQにそって直線を引く。

Ⅲ　大学入試問題の研究

（１）平面上の点Oを中心とする半径１の円をCとし、その外部に点Fをとる。点QがCの周全体を動くとき、線分FQの垂直二等分線の動く範囲を求め、概形を図示せよ。

（０１　お茶の水女子大･理）

〈解答〉

円C：$x^2+y^2=1$、F(a,0)　（a＞１）としてよい。Q（X,Y）とおくと、線分FQの垂直二等分線上の任意の点（x、y）は次の等式を満たす。

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=(x-a)^2+y^2$$

これに、$X^2+Y^2=1$…①を代入して整理すると$2xX+2yY+(a^2-2a-1)=0$…②

①,②を同時に満たす（X,Y)が存在するための条件は

$\dfrac{|a^2-2ax-1|}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\leqq 1$　　ゆえに　　$|a^2-2ax-1|\leqq\sqrt{4x^2+4y^2}$

整理して

a＞１より$\dfrac{\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{2}\right)^2}\leqq 1$　となり原点Oと点Fを焦点とする双曲線に囲まれた部分となる。

（２）放物線$y=\dfrac{1}{4}x^2$の焦点をF、準線をlとする。l上の点Pから放物線へ引いた接線の接点をQとしQからlにおろした垂線の足をHとする。直線QPは∠FQHを二等分することを証明せよ。

（大分大）

〈解答〉

接点（x_0,y_0)とする。焦点F（０，１）、準線$y=-1$だから、点Hは（$x_0,-1$)

また、放物線の定義から、QF＝QHより、△QFHは二等辺三角形だから、FHの中点Mが接線QP上にあることを示せばよい。FHの中点M（$\dfrac{x_0}{2}$,0）、

点Qにおける接線は　$x_0x=2(y_0+y)$

よって、$x_0\times\dfrac{x_0}{2}-2(y_0+0)=\dfrac{{x_0}^2}{2}-2y_0=0$

4　まとめと今後の課題

教材を作ることはいかに大変かを実感した。大半は教師がおもしろいと思うことであった。しかし、生徒の反応は上々で感激してくれ、興味や関心を高めることにはまずまず成功であった。

後は、いかに数学の授業に対する意欲を継続させるかが課題である。