平成１３年度　岐阜県高等学校教育課程研究集会（数学部会）発表要綱

相加平均・相乗平均からの探究

岐阜県立岐山高等学校

１．はじめに

授業の中で教科書の教材をどのように扱っておられるだろうか。例えば「平均」である。数学Ａの教科書(永尾ほか,1999)にあるように相加平均と相乗平均の定義をし、$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ の証明をして終わりにしているというのが現状ではないだろうか。しかし、この２つの平均には意味があり、さらに実際には平均はこの２つだけではなくそれぞれが適切な場面で使われている。

ここで、「平均」について次の３つのテーマで教材開発をし、授業実践を行ったものを紹介する。

Ⅰ．いろいろな平均の意味とその使い方

Ⅱ．いろいろな平均の大小

Ⅲ．ｎ乗平均によるいろいろな平均の統合

いろいろな平均とは相加平均・相乗平均・調和平均・２乗平均の４つの平均のことである。

２．いろいろな平均の意味とその使い方

まず、４つの平均について、式による定義に加えてそれが持つ意味や使い方を考える。

(１)いろいろな平均の事例解説

(ア)相加平均 $\frac{a+b}{2}$

生徒は、クラスの身長・体重・テストの得点などの平均を相加平均を使って求めることをよく知っているし、それらのことを具体例として相加平均の意味を理解している。

(イ)相乗平均 $\sqrt{ab}$

その意味を面積(図１)と体積(図２)で解説する。（以後、ａ，ｂは常に正の数とする。）

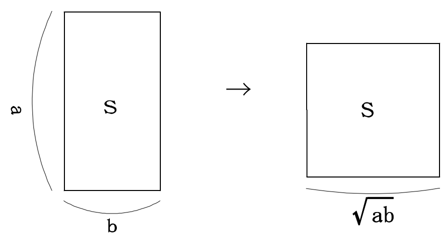

図１

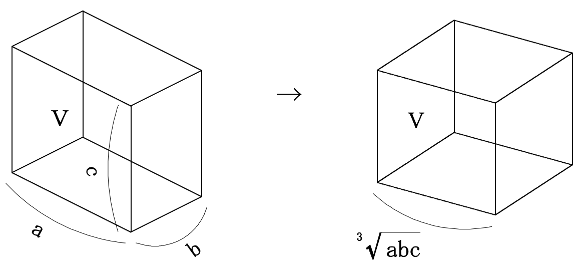

図２

相乗平均は問題１のようなときに使われる。

【問題１】ある国の経済成長率は1994年度は30%，1995年度は20%，1996年度は10%という。1994年～1995年の２年間および1994～1996年の３年間の経済の平均成長率を求めよ。

(ウ)調和平均 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

その意味を内包量の平均として事例で示す。

【問題２】２地点Ａ，Ｂ間の距離は120㎞である。Ａ地点からＢ地点へ行きは時速40㎞で帰りは時速30㎞で往復した。往復の平均時速はどれだけか。

ああ簡単！(40+30)÷2＝35(km/h) と、ほとんどの生徒は考えた。

実際は行きにかかる時間は120÷40＝3(時間)　帰りにかかる時間は120÷30＝4(時間)　よって、往復の平均時速は240÷7＝34.28･･･(km/h)　となる。

(エ)２乗平均 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

この意味を距離の標準化によって示す。

【問題３】原点をＯ，点Ａ(x_1, y_1)，点Ｂ(x_2, y_2)とする。ＯＡ，ＯＢの平均距離を求めよ。

$OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，$OB=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ である。ＯＡとＯＢを各々２乗したものの平均の２乗根を考えると $\sqrt{(OA^2+OB^2)\div 2}=\sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2}{2}}$ となる。

距離の標準化の考え方は、偏差値を求めるときに使われる標準偏差に必要な道具だてである。

(２)授業実践の結果から

生徒は、上の事例のようにいろいろな平均の意味と使い方を具体的に考えることで、平均の持つ意味のおもしろさや状況・場面に応じて異なる平均が適切に使われることのよさを味わうことができたようである。

３．いろいろな平均の大小

ここは４つの平均の大小関係を代数による方法と幾何による方法で求めようとするものである。

(１)代数による不等式の証明の事例解説

【問題４】次の各式を大きな順に並べよ。 $\dfrac{a+b}{2}$，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

２乗して差をとることになるのだがどれとどれの差をとればよいのかわからない。よって、それぞれに適当な値を代入して大小関係を予想する必要がある。やってみると次が予想される。

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqq \frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad \cdots ①$$

２乗して差をとると以下のようになる。

$$\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4}$$

$\left(\sqrt{ab}\right)^2-\left(\dfrac{2ab}{a+b}\right)^2=\dfrac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}$　すべての場合において等号成立は$a=b$のときである。

このように問題４に取り組めば生徒は調べて予想すること（帰納）の大切さと証明することの意義を実感できるものと思われる。

(２)授業実践の結果から

全く手をつけられない生徒が半数を越えた。予想するということ（帰納という数学的な見方・考え方）が身についていないようである。予想ができてしまえばこの証明は容易であった。

(３)幾何による不等式の証明の事例解説

【問題５】　図３においてＤＥ，ＯＢ，ＢＥ，ＥＦをａ，ｂを使って表し、①を示せ。

(４)授業実践の結果から

代数による解法と幾何による解法の２通りの方法で問題にあたった。それによって、形式的な数式による方法に帰納的にアプローチすることができ、加えて図による幾何学的な理解が加わってさらに実感が持てたようである。生徒は図３に感動していた。

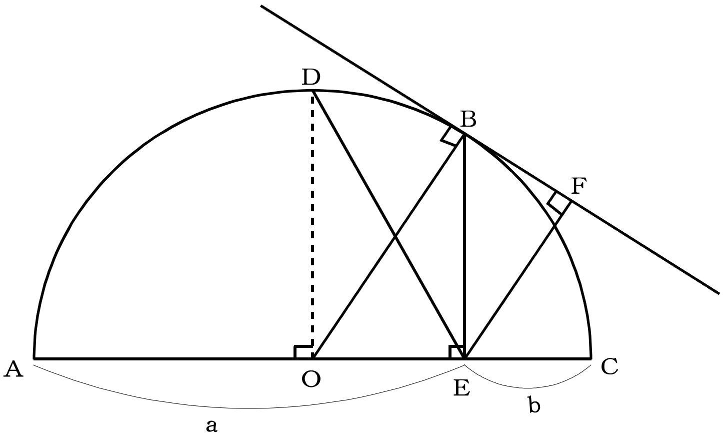

図　3　(仁平,1994)

５．ｎ乗平均による統合とｎ乗平均の単調性

ここでは、ｎ乗平均 $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}$ に調和平均，相乗平均，相加平均，２乗平均が含まれること、そして前節の①を一般化してｎ乗平均の単調性について考察する。

(１)ｎ乗平均による統合とｎ乗平均の単調性

『予想』　・・・　n=-1　n=0　n=1　n=2　n=3　・・・

$$\cdots \leqq \frac{2ab}{a+b} \leqq \sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2} \leqq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leqq \cdots$$

【問題７】２乗平均と３乗平均はどちらが大きいか。

この問題は各々６乗して差をとるという生徒にとってよい練習問題である。

【問題８】 $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} \leqq \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}}$ を証明せよ。

【問題９】ｎ乗平均はｎを限りなく大きくしたときどんな振る舞いをするか。

ａ＞ｂのとき、$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}}{\sqrt[n]{2}} = a$

これはｎを限りなく大きくしていくと、$\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}$ はａとｂのどちらか大きい方に限りなく近づいていくことを示している。

次に、ｎ乗平均でｎ＝-1のときを考えてみる。

$\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}} = \left(\frac{a^n+b^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ より、$\left(\frac{a^{-1}+b^{-1}}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (調和平均)となる。

【問題10】 $\lim_{t\to 0}\sqrt[t]{\frac{a^t+b^t}{2}} = \sqrt{ab}$ を示せ。（$\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}$ の場合、ｎ≠0なので $\lim_{t\to 0}\sqrt[t]{\frac{a^t+b^t}{2}}$ の極限値が存在すればその値をｎ乗平均のｎ＝0のときの値とする。）

この証明には感動的な方法があった。(小寺,1994)

$$f(t)=\log\frac{a^t+b^t}{2}$$ とおく。$f(0)=0$， $f'(t)=\dfrac{a^t\log a+b^t\log b}{a^t+b^t}$ ， $f'(0)=\log\sqrt{ab}$

$$\lim_{t\to 0}\log\sqrt[t]{\frac{a^t+b^t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\log\frac{a^t+b^t}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)=\log\sqrt{ab}$$

よって，$\displaystyle\lim_{t\to 0}\sqrt[t]{\frac{a^t+b^t}{2}}=\sqrt{ab}$ となり，ｎ乗平均のｎ＝0のときは相乗平均とみなすことにする。

【問題11】ｎ乗平均は、ｎを負の無限大としたときどんな振る舞いをするか。

ａ＞ｂのとき、 $\displaystyle\lim_{n\to-\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{a^{-t}+b^{-t}}{2}\right)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{2a^tb^t}{a^t+b^t}\right)^{\frac{1}{t}}$ ＝ｂとなる。

【問題12】ｎ乗平均 $\sqrt[n]{\dfrac{a^n+b^n}{2}}$ は、ａ＞ｂのとき、ａを上限とし、ｂを下限とし単調増加である。

これを高校生の範囲で解くよい方法があれば教えていただきたい。(鈴木,1985)
ちなみに、ａ＝9，ｂ＝1として $y=\sqrt[x]{\dfrac{a^x+b^x}{2}}$ のグラフをかいてみると図４のようになる。

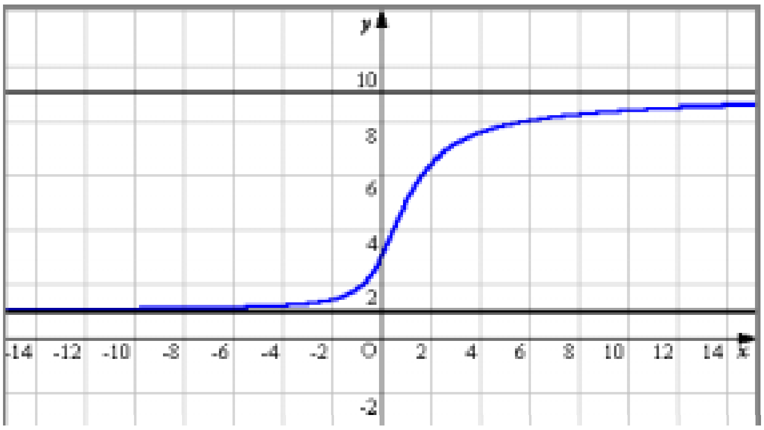

図　4

(２)授業実践の結果から

ｎ乗平均のｎ＝-1，0，1，2の時を考えることで４つの平均をｎ乗平均に統合することそしてｎ乗平均の単調性を示そうとした。生徒にとってはどちらも難しい内容ではあったがなんとか理解し、その証明の方法と結果に感動していた。ただし、ｎ乗平均の単調性は証明できず、グラフで示すまでにとどまった。

６．終わりに

筆者がいつも教材を作るときの礎としているものは次の２つである。

１．個々の子供のなんらかの必要感に応じるものでなければならない。

２．数学的な考え方に対して適切なものでなければならない。

これは能田(1990)がオープンアプローチの指導で取り扱う問題の前提条件として示したものであるが、これはすべての数学の教材を扱うときの道標となるべきものだろう。

引用・参考文献

(１)小寺平治（1996）*大学入試数学のルーツ* 現代数学社 pp.6-9
(２)永尾　汎　他８名（1999）*高等学校　数学A*　数研　pp.43-44
(３)仁平政一（1994)図形と関連させた不等式の証明 *教育科学　数学教育* 明治図書No.436P.106
(４)能田伸彦（1990）*算数・数学科　オープン　アプローチによる指導の研究　授業の構成と評価* 東洋館 p.217
(５)鈴木義一郎(1985) *教職数学シリーズ 基礎編４　教養統計学*　共立　pp.25-31