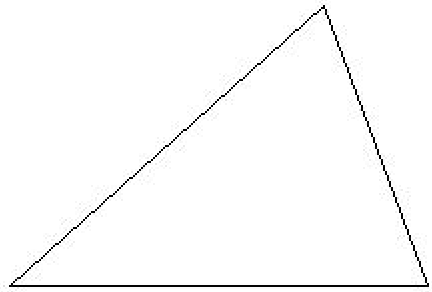
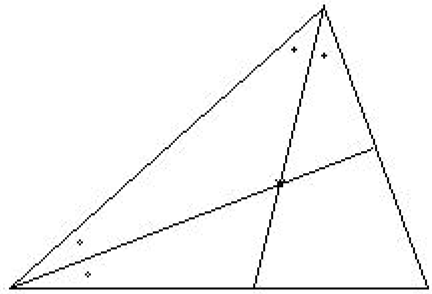
問題番号	問い	三角形の内心を求めるにはどのように作図すればよいか。手順を説明しなさい。 
１７	正解	三角形の２角の二等分線をかく。 その２本の二等分線の交点が三角形の内心になる。 

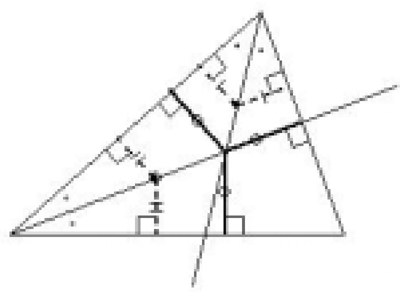
誤　答　例		つ　ま　ず　き　原　因	分析と解消
1	無解答	三角形の内心の意味（定義）が理解できていない。または，二等分線の性質がわからない。	４７ページ 【１７－１】
2	三角形の２辺の垂直二等分線の交点	二等分線の性質が理解できていない。 または，垂直二等分線の性質がわからない。	４９ページ 【１７－２】
3	三角形の２つの中線の交点	二等分線の性質が理解できていない。 または，中線の性質がわからない。	５１ページ 【１７－３】
4	三角形の２頂点から対辺にそれぞれひいた垂線の交点	二等分線の性質が理解できていない。	４７ページ 【１７－１】

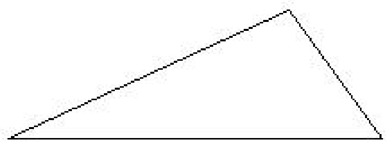
正解の解説

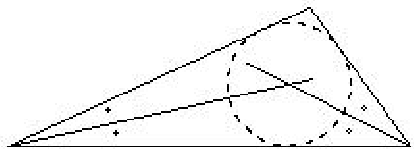
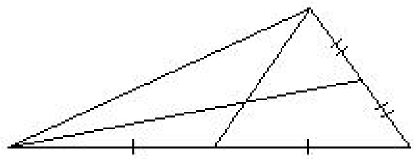
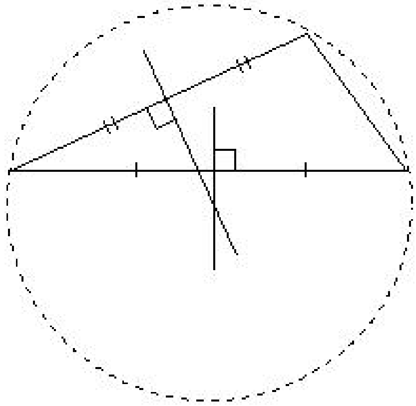
三角形の内心とは内接円の中心である。

三角形の角の二等分線上の点から２辺までの距離は等しいので，２角の二等分線の交点から３辺までの距離はすべて等しくなる。

したがって，２つの二等分線の交点を中心に辺までの距離を半径とする円は，３辺に接する円になり，その中心が内心になる。



練習	右の三角形の内心，外心，重心の位置を求めなさい。 

解答	内心：２角の二等分線の交点  重心：２本の中線の交点  外心：２辺の垂直二等分線の交点 

誤答例１，４のつまずきの分析【１７－１】

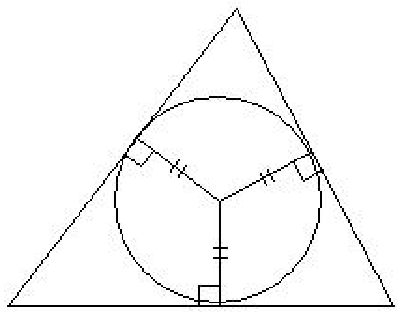
以下の２点が考えられます。

(1) 内心の意味を間違えて覚えてしまった。

(2) 角の二等分線の性質について理解していない。

(1)のつまずきの解消

○　内心について正しく理解することが必要です。



右の図のような三角形の３辺に接する円を**内接円**といいます。この円の中心を**内心**といいます。

したがって，右図からわかるように，**内心は３辺から等距離にある点**になります。

内心の求め方は，次のように求めることができます。

内心の求め方
１．三角形の２角の二等分線をひく。
２．その２つの二等分線の交点を求める。

このことが正しいことは，「**(2)のつまずきの解消**」で証明します。

(2)のつまずきの解消

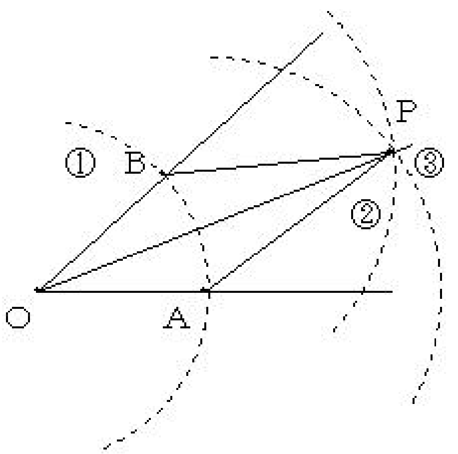
○　角の二等分線の性質を正しく理解することが必要です。

作図方法（右図参照）

①　頂点Ｏを中心に適当な半径の円をかきます。

②　円とその角をはさむ２辺との２つの交点をＡ，Ｂとし，この２点を中心に等しい半径の円をかきます。

③　２つの円の交点をＰとし，頂点Ｏと点Ｐを結びます。



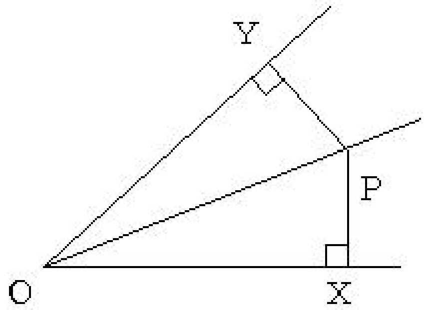
三角形の合同を用いて，角が二等分されることを証明します。

＜証明＞
△ＯＰＡと△ＯＰＢで，
ＯＰ＝ＯＰ（共通）…①
作図から，
ＯＡ＝ＯＢ　　　　…②
ＡＰ＝ＢＰ　　　　…③
①，②，③から，３辺の長さがそれぞれ等しいので，
△ＯＰＡ≡△ＯＰＢ
対応する角の大きさは等しいから，
∠ＡＯＰ＝∠ＢＯＰ
よって，ＯＰは角の二等分線である。

○　二等分線の性質について調べてみましょう。

$\boxed{\text{性質}}$　（右図参照）
次のことが成り立ちます。

∠Ｏの二等分線上の点Ｐから，その角をはさむ２辺に垂線ＰＸ，ＰＹをひくとき，
ＰＸ＝ＰＹ
が成り立つ。

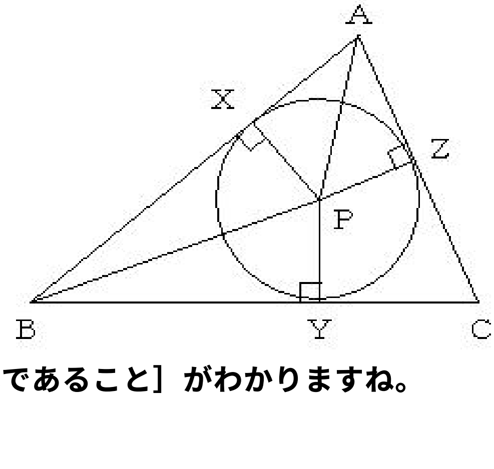


三角形の合同を示して証明します。

＜証明＞
△ＯＰＸと△ＯＰＹで，
ＯＰ＝ＯＰ（共通）　…①
∠ＰＸＯ＝∠ＰＹＯ＝90°…②
ＯＰは角の二等分線だから，
∠ＸＯＰ＝∠ＹＯＰ　…③
①，②，③から，直角三角形の１辺と２角が等しいので，
△ＯＰＸ≡△ＯＰＹ
対応する辺の長さは等しいから，ＰＸ＝ＰＹ

○　二等分線の性質を使って，「内心の求め方」が正しいことを証明します。

内心の求め方
１．三角形の２角の二等分線をひく。
２．その２つの二等分線の交点を求める。



＜証明＞
△ＡＢＣの∠Ａ，∠Ｂの二等分線をひき，その交点をＰとする。そして，Ｐから３辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡに垂線をひき，交点をそれぞれＸ，Ｙ，Ｚとする。

［ＰＸ＝ＰＹ＝ＰＺ］がわかれば，［Ｐが内心であること］がわかりますね。

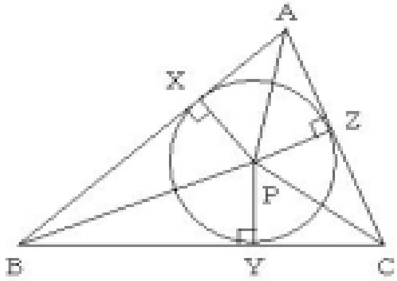
＜証明＞
ＡＰは角の二等分線なので性質から，
ＰＸ＝ＰＹ　…①
同様に，ＢＰについてもいえるから，
ＰＹ＝ＰＺ　…②
①，②から　ＰＸ＝ＰＹ＝ＰＺが成り立つ。
よって，Ｐは△ＡＢＣの内心になる。

（参考）３つの角の二等分線が１点で交わることの証明

右図で［∠Ａと∠Ｂの二等分線の交点をＰとするとき，ＣＰが∠Ｃの二等分線であること］がわかれば，［３つの二等分線が１点で交わること］になりますね。

<証明>

△ＣＰＹと△ＣＰＺで，
∠ＰＹＣ＝∠ＰＺＣ＝90°（垂線）
前ページの証明の①，②から，ＰＹ＝ＰＺ
また，ＣＰ＝ＣＰ（共通）
したがって，斜辺と他の１辺がそれぞれ等しい直角三角形だから，△ＣＰＹ≡△ＣＰＺ
よって，∠ＰＣＹ＝∠ＰＣＺとなり，ＣＰは∠Ｃの二等分線になる。
したがって，３角の二等分線は１点で交わることになる。



誤答例２のつまずきの分析【１７－２】

以下の２点が考えられます。

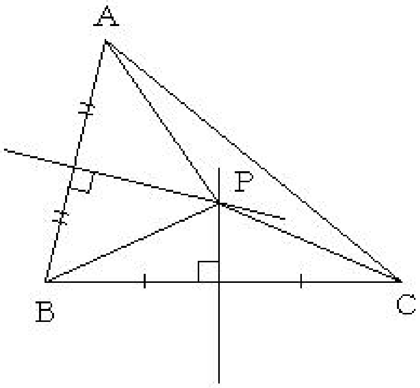
(1) 角の二等分線の性質が理解できていない。
(2) 垂直二等分線の性質が理解できていない。

(1)のつまずきの解消

○　内心について正しく理解することが必要です。
【１７－１】（４７ページ）を参照してください。

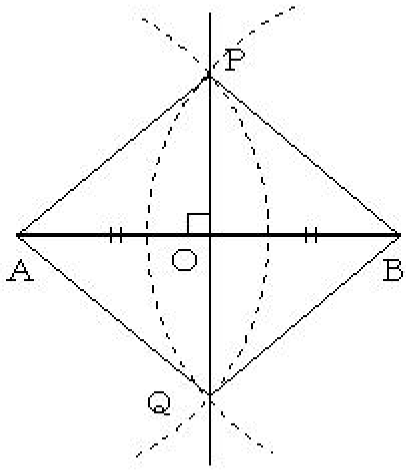
(2)のつまずきの解消

○　垂直２等分線の性質を正しく理解することが必要です。
そうすれば，内心を求めるのに垂直二等分線を用いないことがわかります。
当然，右図のような三角形であれば，Ｐから辺ＡＢ，ＢＣまでの距離が違うことはすぐにわかります。
なお，垂直二等分線を用いるのは外心を求める場合です。三角形の２辺の垂直二等分線の交点が外心になることは，あとで証明します。



$\boxed{\text{垂直二等分線の作図方法}}$（右図参照）

１．線分ＡＢの両端を中心に，適当な半径の円をかきます。
２．２つの円の交点をＰ，Ｑとして，２点を結びます。このとき，ＡＢとＰＱの交点をＯとします。



○　ひし形の性質をを用いて，垂直二等分線であることを証明します。

<証明>

作図から，
ＡＰ＝ＡＱ＝ＢＰ＝ＢＱ
４辺が等しいので四角形ＡＱＢＰはひし形である。したがって，対角線を考えると，
ＡＢ⊥ＰＱ，ＡＯ＝ＯＢ
したがって，ＰＱはＡＢの垂直二等分線になる。

それでは，垂直二等分線の性質について調べてみましょう。

性質　（前ページの図参照）
次のことが成り立ちます。

線分ＡＢの垂直二等分線上の点Ｐから，Ａ，Ｂまでの距離は等しい。

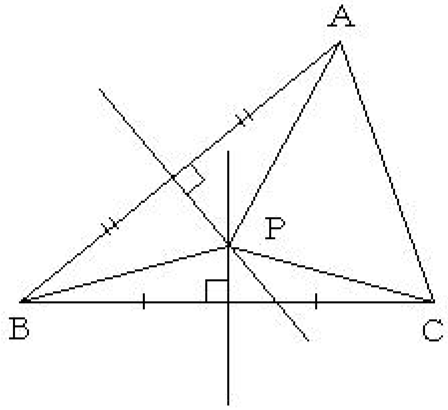
三角形の合同を示して証明します。
＜証明＞
△ＯＰＡと△ＯＰＢで，
ＯＰ＝ＯＰ（共通）　…①
ＯＰは垂直二等分線だから，
ＯＡ＝ＯＢ　…②
∠ＰＯＡ＝∠ＰＯＢ＝90°…③
①，②，③から，２辺とそのはさむ角が等しいので，△ＯＰＡ≡△ＯＰＢ
対応する辺の長さは等しいから，ＰＡ＝ＰＢ
よって，点ＰからＡ，Ｂまでの距離は等しい。
このことを使うと，つぎのことがいえます。

三角形の２辺の垂直二等分線の交点は外心（外接円の中心）になる。

○　証明してみましょう。

［ＰＡ＝ＰＢ＝ＰＣ］がわかれば，［Ｐが外心であること］がわかりますね。

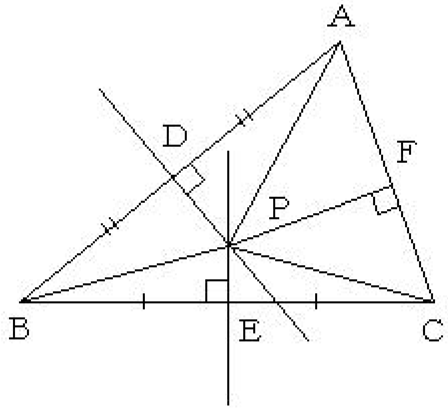
＜証明＞
ＡＢの垂直二等分線上にＰがあるので，
ＰＡ＝ＰＢ　…①
同様に，ＢＣの垂直二等分線上にＰがあるので，ＰＢ＝ＰＣ　…②
①，②から，
ＰＡ＝ＰＢ＝ＰＣ
すなわち，Ｐから３つの頂点Ａ，Ｂ，Ｃまでの距離は等しいので，Ｐは外心になる。



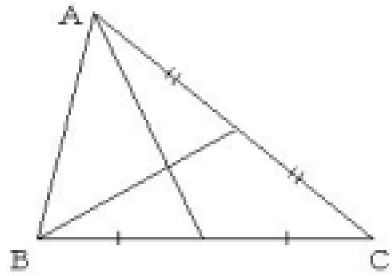
（参考）３辺の垂直二等分線が１点で交わることの証明

Ｐから辺ＣＡに垂線をひき，交点をＦとする。
［ＦがＣＡの中点であること］がわかれば，［３辺の垂直二等分線が１点で交わること］がわかりますね。

＜証明＞
上の証明の①，②から，ＰＣ＝ＰＡとなるので，△ＰＣＡは二等辺三角形である。
よって，二等辺三角形の頂点から下ろした垂線は底辺を二等分するので，ＰＦは辺ＣＡの垂直二等分線になる。
したがって，３辺の垂直二等分線は１点で交わることになる。



誤答例３のつまずきの分析【１７－３】
以下の２点が考えられます。
(1) 二等分線の性質が理解できていない。
(2) 垂直二等分線の性質が理解できていない。



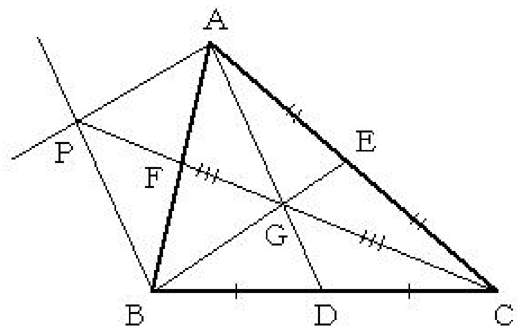
(1)のつまずきの解消
○ 内心について正しく理解することが必要です。
【１７－１】（４７ページ）を参照してください。

(2)のつまずきの解消
○ 中線の性質を正しく理解することが必要です。
そうすれば，内心を求めるのに中線を用いないことがわかります。

三角形の３つの中線は１点で交わり，この交点を**重心**という。

重心をＧとすると，Ｇは３つの中線をそれぞれ２：１に分ける。

○ 平行四辺形の性質を用いて，証明します。証明は長いので，じっくり取り組んでください。



＜証明＞
中線ＡＤ，ＢＥの交点をＧとし，ＣＧの延長線上にＣＧ＝ＧＰとなる点Ｐをとる。このとき，ＣＰとＡＢの交点をＦとする。

［３つの中線は１点で交わること］を示すには，［２つの中線の交点を残りの中線が通ること］がわかればよいですね。

△ＣＢＰでＣＤ＝ＤＢ，ＣＧ＝ＧＰとなるので，中点連結定理から
ＤＧ//ＢＰ　　…①
２ＤＧ＝ＢＰ　…①’
同様に，△ＣＡＰでＣＥ＝ＥＡ，ＣＧ＝ＧＰとなるので，中点連結定理から，
ＥＧ//ＡＰ　…②
２ＥＧ＝ＡＰ　…②’

①，②から，四角形ＡＰＢＧは平行四辺形になる。　…③
よって，対角線は互いに中点で交わるので，ＡＦ＝ＦＢとなる。
したがって，ＣＦは中線であるから，３つの中点は１点Ｇで交わる。

また，③からＢＰ＝ＧＡ，ＡＰ＝ＧＢとなるので，①’，②’から，
２ＤＧ＝ＧＡ　　２ＥＧ＝ＧＢ

すなわち，ＡＧ：ＧＤ＝２：１，ＢＧ：ＧＥ＝２：１　…④
また，③からＰＦ＝ＦＧとなるので，ＣＧ＝ＧＰから，ＣＧ：ＧＦ＝２：１になることもわかる。　…⑤
④，⑤から，Ｇは３中線を２：１に分けることがわかる。

【三角形の五心】

内心，外心，重心，垂心，傍心の５つをまとめて，五心という。

以下に，作図の手順を示す。

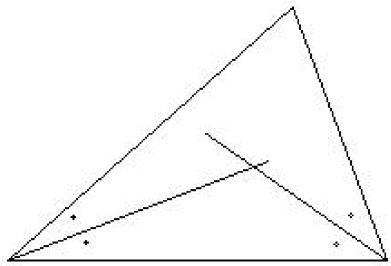
＜内心＞

○　作図

1．三角形の２角の二等分線をひく。
2．二等分線の交点を内心という。

○　性質

・　三角形の内接円の中心になる。



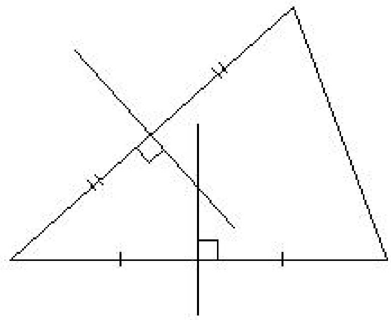
＜外心＞

○　作図

1．三角形の２辺の垂直二等分線をひく。
2．垂直二等分線の交点を外心という。

○　性質

・　三角形の外接円の中心になる。



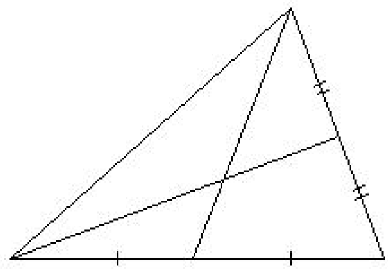
＜重心＞

○　作図

1．２つの中線をひく。
2．中線の交点を重心という。

○　性質

・　重心で中線は２：１に分けられる。



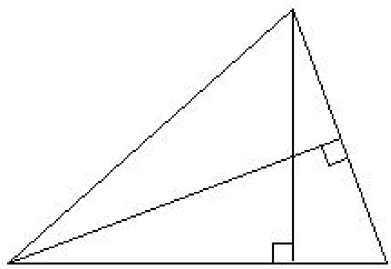
＜垂心＞

○　作図

1．２つの頂点からそれぞれ対辺へ垂線をひく。
2．垂線の交点を垂心という。

○　性質

・



＜傍心＞

○　作図

1．外角の二等分線をひく。
2．２つずつの二等分線の交点を傍心という。
（３つの傍心がある。）

○　性質

・　２辺を延長した直線と残りの１辺に接する円の中心になる。