

問題番号	問い	2 次不等式 $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ の解がすべての実数であるような定数 k の範囲を求めなさい。	
2 2	正解	- 2 k 3	
誤 答 例		つ ま ず き 原 因	分析と解消
1	無解答	問題の意味が理解できない。	6 8 ページ 【 2 2 - 1 】
2	$k = -2, 3$	与えられた不等式が 0 なので，条件もそのまま， 0 とした。	6 8 ページ 【 2 2 - 1 】
3	$-2 < k < 3$	条件に 0 になる場合を含めなかった	7 0 ページ 【 2 2 - 2 】
4			
5			
正解の解説 $y = x^2 - 2kx + k + 6$ のグラフは，下に凸であるので，x 軸と接するか共有点をもたなければよい。 したがって，$b^2 - 4ac \leq 0$ となればよいから， $(-2k)^2 - 4 \times 1 \times (k + 6) \leq 0$ $4k^2 - 4k - 24 \leq 0$ $k^2 - k - 6 \leq 0$ $(k + 2)(k - 3) \leq 0$ よって，$-2 \leq k \leq 3$   $b^2 - 4ac = 0$ $b^2 - 4ac < 0$			
練習	次の 2 次不等式の解がすべての実数であるような定数 k の範囲を求めなさい。 (1) $x^2 - 3x + k \geq 0$ (2) $x^2 + (k + 3)x + 4k \geq 0$ (3) $x^2 + kx - k + 8 > 0$ (4) $-x^2 + 4x - k + 1 < 0$		
解答	(1) $k \geq \frac{9}{4}$ (2) $1 \leq k \leq 9$ (3) $-8 < k < 4$ (4) $k > 5$		

誤答例 1 のつまずきの分析【22 - 1】

「2次不等式の解がすべての実数」ということの意味が理解できないか、どのような条件であれば「2次不等式の解がすべての実数」となるかが分からなかったと思われます。

つまずきの解消

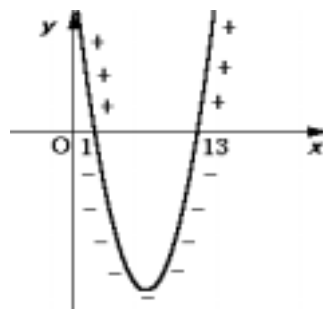
- まず、「解がすべての実数」となるような2次不等式と、そうでないものを具体的に比較してみましょう。

「解がすべての実数」とはならない例

$x^2 - 14x + 13 \geq 0$ の解は、 $(x-1)(x-13) \geq 0$ より $x \leq 1$, $13 \leq x$ となります。これは $x^2 - 14x + 13 \geq 0$ を満たす x は1以下か、または、13以上の実数でなくてはならないということです。

つまり、 $x^2 - 14x + 13$ の x に、1以下か、または、13以上の値を代入しないと、式の値が0以上にならないことを意味しています。

これをグラフで見えてみると、右図のようになり、 x が1以下か、または、13以上のときだけグラフは x 軸上かまたは、 x 軸より上にあります。



「解がすべての実数」となる例（その1）

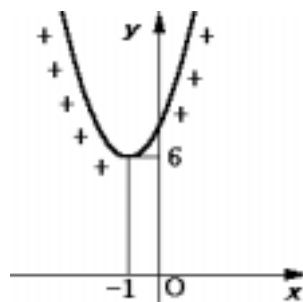
$x^2 - 2x + 7 \geq 0$ の左辺は因数分解できないので、 $b^2 - 4ac$ を計算してみると

$(-2)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -24 < 0$ となり、 $y = x^2 - 2x + 7$ のグラフは x 軸と共有点をもたないことがわかります。

頂点を調べてグラフをかいてみると、 $y = (x-1)^2 + 6$ と変形できるので、右図のようになります。

グラフをみると、つねに x 軸より上にありますから、 x にどんな実数を代入しても $x^2 - 2x + 7$ の値はプラス、つまり、 $x^2 - 2x + 7 > 0$ となります。

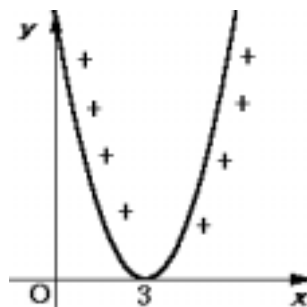
よって、どんな値を x に代入しても $x^2 - 2x + 7 \geq 0$ はつねに成り立つことがわかりますから、 $x^2 - 2x + 7 \geq 0$ を満たす x の範囲、すなわちこの2次不等式の解は「すべての実数」になるのです。



「解がすべての実数」となる例（その2）

$x^2 - 6x + 9 \geq 0$ の左辺を因数分解すると、 $(x-3)^2 \geq 0$ となります。どんな値を x に代入しても、左辺は2乗しますから0以上になることがわかります。

つまり、どんな値を x に代入しても $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ はつねに成り立つので $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ の解も「すべての実数」となります。これをグラフで見えてみると、右図のようになり、つねにグラフが x 軸より上か x 軸上にあります。



- 上の例の は $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ の k に 7 を代入したときのもので、 , もそれぞれ $k = 1$, $k = 3$ の場合なのです。

つまり、 $k = 7$ のとき、 $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ は $x^2 - 14x + 13 \geq 0$ となって、解は「すべての実数」とはなりません。

$k = 1$, $k = 3$ のとき、それぞれ $x^2 - 2x + 7 \geq 0$, $x^2 - 6x + 9 \geq 0$ となって、解は「すべての実数」となるのです。

したがって、 $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ の解が「すべての実数」になるためには、 , のようになればよいのです。

の場合とは、グラフがつねに x 軸より上にある場合、すなわち x 軸と共有点をもたない場合です。 の場合とは、グラフがつねに x 軸より上か x 軸上にある場合、すなわち x 軸と接している場合です。

グラフが x 軸と共有点をもたないための条件は $b^2 - 4ac < 0$ で、 x 軸と接するための条件は $b^2 - 4ac = 0$ ですから、このどちらかであれば、 $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ の解が「すべての実数」になります。

よって、その条件とは、この 2 つを合わせて $b^2 - 4ac \leq 0$ ということになります。

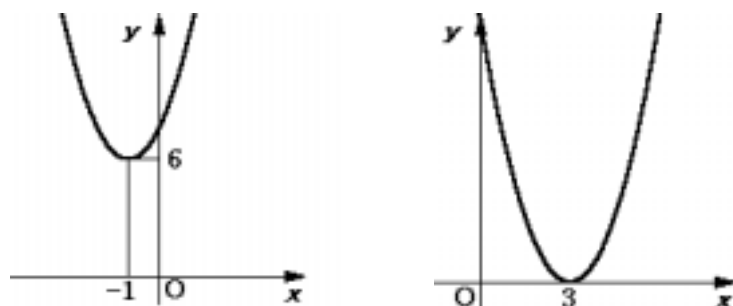
したがって、 $b^2 - 4ac = (-2k)^2 - 4 \times 1 \times (k + 6) \leq 0$ より、 $4k^2 - 4k - 24 \leq 0$, 両辺を 4 で割って、 $k^2 - k - 6 \leq 0$, $(k + 2)(k - 3) \leq 0$

よって、 $-2 \leq k \leq 3$ のとき、 $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ の解が「すべての実数」になるということがわかりました。

<別解> グラフの頂点の座標から求める方法

$y = x^2 - 2kx + k + 6$ とおくと、 $y = (x - k)^2 - k^2 + k + 6$ と変形できるので

$y = x^2 - 2kx + k + 6$ のグラフの頂点の座標は $(k, -k^2 + k + 6)$ となります。



$y = x^2 - 2kx + k + 6$ のグラフが、さきほどの例 のようになるには、頂点の y 座標がプラスになればよく、例 のようになるには、頂点の y 座標が 0 になればよいのです。

したがって、グラフが または のようになるための条件は、頂点の y 座標が 0 以上となればよいのです。

よって、 $-k^2 + k + 6 \geq 0$ より、両辺に -1 をかけて、 $k^2 - k - 6 \leq 0$ となって、先ほどと同じ $-2 \leq k \leq 3$ のとき、 $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ の解が「すべての実数」になるということがわかります。

誤答例 2 のつまずきの分析【22 - 2】

問題の不等式に「 $=$ 」が入っていることを見落としたために、 $x^2 - 2kx + k + 6$ が 0 に等しくなる場合を条件に入れなかったと思われます。

つまずきの解消

○ 与えられた 2 次不等式が $x^2 - 2kx + k + 6 > 0$ であれば、左辺はつねにプラスですから、

$y = (x - k)^2 - k^2 + k + 6$ のグラフは、グラフ のように x 軸と共有点をもたなければよいので、

$b^2 - 4ac < 0$ となります。

ところが、この場合は $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ ですから、左辺が 0 になってもよいことになります。

しかし、グラフ のようになると 0 になるだけでなく、マイナスにもなってしまう場合があるので、適しません。

グラフ の場合なら、0 になることはあっても、マイナスにはなりませんから大丈夫なのです。

したがって、 $x^2 - 2kx + k + 6 \geq 0$ となるのは、グラフ の場合だけでなく、グラフ の場合も含めなくてはなりませんので、 $b^2 - 4ac < 0$ に $b^2 - 4ac = 0$ も含めた $b^2 - 4ac \leq 0$ が条件になります。

