

問題番号	問い	2 次関数 $y=x^2-2x+k$ が x 軸と共有点をもつように k の値の範囲を求めなさい。		
2 1	正解	$k \geq 1$		
誤 答 例		つ ま ず き 原 因		分析と解消
1	無解答	グラフが x 軸と共有点をもつための条件を理解していない。		6 3 ページ 【 2 1 - 1 】
2	$k < 1$	接する場合を入れなかった。		6 4 ページ 【 2 1 - 2 】
3	$k = 1$	式変形で間違えた。		6 5 ページ 【 2 1 - 3 】
4				
5				
正解の解説 1 $b^2-4ac \geq 0$ となればよいから $(-2)^2 - 4 \times 1 \times k \geq 0$ $4 - 4k \geq 0$ よって、 $k \leq 1$				
正解の解説 2 このグラフは下に凸なので x 軸と共有点をもつためには、 $y=x^2-2x+k$ の頂点が x 軸上にあるか、 x 軸より下にあればよい。 $y=(x-1)^2-1+k$ と変形できるので、頂点の y 座標は $-1+k$ であるから、頂点が x 軸上またはその下にあるためには、 $-1+k \leq 0$ より $k \leq 1$				
練習	次の 2 次関数が x 軸と共有点をもつように k の値の範囲を求めよ。			
	$(1) y=x^2-kx+4$ $(2) y=x^2+2x-k+5$ $(3) y=-x^2+2kx-9$ $(4) y=2x^2-kx+k-2$			
解答	$(1) k \leq -4, 4 \leq k$ $(2) k \geq 4$ $(3) k \leq -3, 3 \leq k$ (4) すべての数			

誤答例 1 のつまずきの分析【21 - 1】

グラフが x 軸と共有点をもつための条件を理解していないか、式が複雑なので、共有点をもつための条件を $b^2 - 4ac$ に当てはめることができなかったと思われます。

つまずきの解消

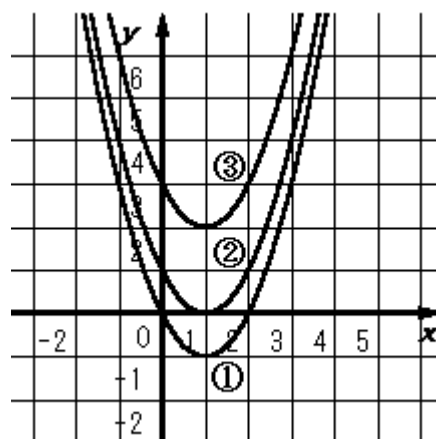
- 問題 20 と同様に、この問題の式にも x と k という 2 文字が入り複雑になっていますので、この場合も k にいろいろな値を当てはめてグラフをかくことにしましょう。

$k = 0$ を代入すると $y = x^2 - 2x$ となって、グラフは右図の ① のようになり、 x 軸と 2 点で交わります。

$k = 1$ のときは、 $y = x^2 - 2x + 1$ で、② のように x 軸と 1 点で接します。

$k = 3$ では $y = x^2 - 2x + 3$ となって、グラフは右図の ③ のように x 軸と共有点をもたなくなります。

つまり、共有点をもつということは、① のように x 軸と 2 点で交わるか、② のように 1 点で接すればよいのです。



- そのための条件は何でしょうか。

【19 - 1】に詳しく説明してありますが、2 次関数のグラフと x 軸の位置関係は $b^2 - 4ac$ の符号によって変わります。

まず、① のようにグラフが x 軸と 2 点で交わるためには、 $b^2 - 4ac$ の符号はプラスでなくてはなりません。また、② のようにグラフが x 軸と接するためには、 $b^2 - 4ac$ の値は 0 でなくてはなりません。

したがって、 x 軸と共有点をもつためには、このどちらかであればよいのですから、 $b^2 - 4ac$ の符号は正または 0 ということになります。

すなわち、 $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times k \geq 0$ となります。

$$4 - 4k \geq 0$$

よって $k \leq 1$ が共有点をもつための k の範囲になります。

- この問題をグラフの頂点の y 座標に注目して解いたらどうなるでしょうか。

図の ① のように、頂点が x 軸より下、つまり y 座標がマイナスのときは 2 点で交わり、② のように頂点が x 軸上、つまり y 座標が 0 のときは接し、頂点が x 軸より上、つまり y 座標がプラスのときは共有点がありません。

$y = x^2 - 2x + k$ を変形すると、

$$y = (x - 1)^2 - 1 + k$$

となるので、頂点の座標は $(1, -1 + k)$ です。

よって共有点をもつには y 座標が 0 以下になればよいのです。

$$-1 + k \leq 0$$

となり、 $k \leq 1$ が求まります。

誤答例 2 のつまずきの分析【21 - 2】

2 次関数のグラフと x 軸が共有点をもつ場合を、2 点で交わる場合のみと考えたか、不注意で x 軸に接する場合の条件を入れ忘れたので、解答に等号が入っていないと思われます。

つまずきの解消

- 2 次関数のグラフと x 軸が共有点をもつ場合とは、グラフ のように 2 点で交わる場合と、グラフ のように 1 点で接する場合の 2 つがあります。

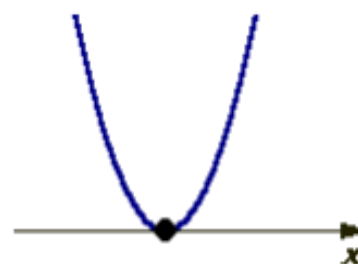
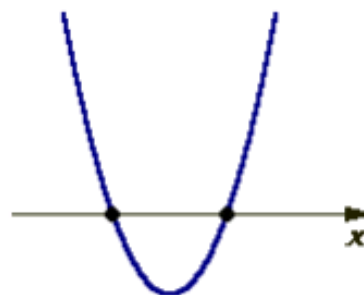
2 点で交わるための条件は、 $b^2 - 4ac > 0$ で、
1 点で接するための条件は、 $b^2 - 4ac = 0$ なので、
共有点をもつための条件は、この 2 つを合わせて
 $b^2 - 4ac \geq 0$ となります。

したがって、

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times k \geq 0$$

$$4 - 4k \geq 0,$$

よって、 $k \leq 1$ が共有点をもつための k の範囲になります。



- この問題をグラフの頂点の y 座標に注目して解いたらどうなるでしょうか。

$y = x^2 - 2x + k$ を変形すると $y = (x - 1)^2 - 1 + k$ となるので、頂点の座標は $(1, -1 + k)$ です。

2 点で交わるための条件は、頂点が x 軸より下、つまり y 座標がマイナスですから、

$$-1 + k < 0$$

接するための条件は、頂点が x 軸上、つまり y 座標が 0 ですから、

$$-1 + k = 0$$

共有点をもつための条件は、この 2 つを合わせて、

$$-1 + k \leq 0$$

となり、 $k \leq 1$ が求められます。

誤答例 3 のつまずきの分析【21 - 3】

$(-2)^2 - 4 \times 1 \times k \geq 0$ から、 $4 - 4k \geq 0$ とし、4 を移項して
 $-4k \geq -4$

としたが、両辺を -4 で割ったときに不等号の向きを変えるのを忘れて

$$k \geq 1$$

としてしまったと思われます。

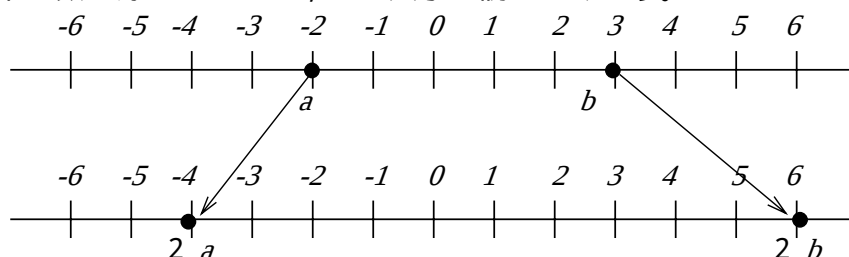
つまずきの解消

- なぜ、不等式の両辺を負の数で割ったり、かけたりすると不等号の向きが変わるかを考えてみよう。

$a < b$ である2数 a, b を取ります。

(1) a, b をそれぞれ2倍した数, $2a$ と $2b$ の大小を比べてみましょう。

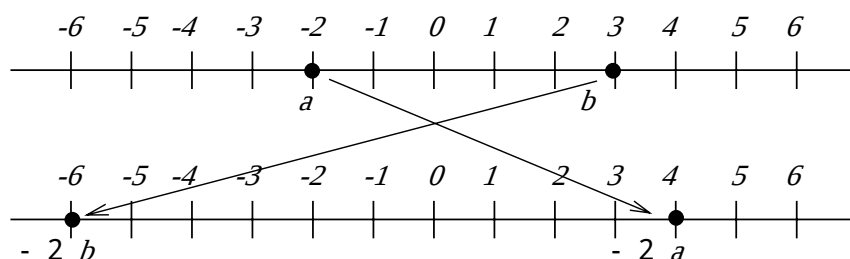
例えば, $a = -2, b = 3$ として, 上の数直線上に $-2, 3$ をとり, これらを2倍した数を下の数直線上にとって, その大小を調べてみよう。



この例から分かるように, a, b をそれぞれ2倍すると原点からの距離がそれぞれ2倍となり, $2a, 2b$ の大小は変わりませんので, $2a < 2b$ となります。だから, 正の数を不等式の両辺にかけても不等号の向きが変わらないことがわかります。

(2) a, b をそれぞれ-2倍した数, $-2a, -2b$ の大小を比べてみましょう。

例えば, $a = -2, b = 3$ として, 上の数直線上に $-2, 3$ をとり, これらを-2倍した数を下の数直線上にとって, その大小を調べてみよう。



a, b を-2倍すると, もとの2数と $-2a, -2b$ とは符号が逆となり, 原点からの距離がそれぞれ2倍となります。このことから, $-2a$ と $-2b$ の大小は逆になります。

だから, $-2a > -2b$ となり, 不等号の向きが逆になることが分かります。

<まとめ>

$$\begin{aligned} A < B, C > 0 \text{ ならば, } AC < BC, \frac{A}{C} < \frac{B}{C} \\ A < B, C < 0 \text{ ならば, } AC > BC, \frac{A}{C} > \frac{B}{C} \end{aligned}$$

<不等式を解く手順>

ここで1次不等式を解く手順についてまとめます。

- 1 両辺を整理して, 文字を含む項を一方の辺に, 定数項を他方の辺に集める。
- 2 $ax > b$ か $ax < b$ の形にする。
- 3 両辺を x の係数 a でわる。 $a > 0$ のとき, 不等号の向きは変わらない。
 $a < 0$ のとき, 不等号の向きは反対になる。

以上の不等式を解く手順を図示すると以下のようになります。

