

問題番号	問い	2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ を解きなさい。	
1 2	正解	$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$	
誤答例		つまずき原因	分析と解消
1	無解答	解の公式を適用することができなかった。	3 3 ページ 【1 2 - 1】
2	$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$	$(-1)^2$ の計算を -1^2 と考えた。	3 4 ページ 【1 2 - 2】
3	$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$	の中の計算を $(-1)^2 - 1 \times (-1) = 1 + 1 = 2$ とした。	3 3 ページ 【1 2 - 1】
4	$x = -1, 1$	$x^2 - x - 1 = (x + 1)(x - 1)$ と因数分解した。	2 1 ページ 【8 - 1】
5			
<p>正解の解説</p> <p>2次方程式の解の公式を利用する。</p> $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$			
練習	<p>次の2次方程式を解きなさい。</p> <p>(1) $x^2 - 3x - 1 = 0$</p> <p>(2) $x^2 - x - 3 = 0$</p>		
解答	<p>(1) $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ (2) $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$</p>		

誤答例 1 のつまずきの分析【12 - 1】

解の公式を利用して解を求めようとしたができなかったと考えられます。

つまずきの解消

2 次方程式を解くには、まず $ax^2 + bx + c = 0$ の形に変形をして、左辺が因数分解できるかどうかを考えます。

できない場合には、2 次方程式の解の公式を利用して解を求めます。

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は、次の公式により求めることができます。

2 次方程式の解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式の証明

2 次式 $ax^2 + bx + c$ [$a \neq 0$] は

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \text{ と変形される。}$$

よって、 $ax^2 + bx + c = 0$ とすると、

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$a \text{ で割って、} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\text{ゆえに、} x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{したがって、} x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例えば、二次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ において、

$a = 1$ 、 $b = -1$ 、 $c = -1$ なので、

解の公式を利用する場合には、 x の係数は、1 ではなく -1 であり、定数項は 1 ではなく、-1 であることに注意しましょう。

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

誤答例 2 のつまずきの分析【12 - 2】

解の公式の適用は正しくできていますが、 $(-1)^2 = -1^2$ の中の計算において $(-1)^2 = -1^2$ と考えたと思われます。

つまずきの解消

$(-1)^2$ と -1^2 の結果は違います。

$(-1)^2 = 1$ 、 $-1^2 = -1$ です。

指数の計算を行うに当たっては指数法則を利用します。ここで復習します。

n を自然数とすると、文字 a を n 個かけたものを a^n かき、 a の n 乗といいます。

このとき、 n を a^n の指数といいます。

例えば、 3^4 は、 $3 \times 3 \times 3 \times 3$ を表わします。

また、 a^1 、 a^2 、 a^3 、 \dots 、 a^n 、 \dots などを a の累乗といい、特に、 $a^1 = a$ であり、 a^2 は a の平方、 a^3 は a の立方ともいいます。

一般に、 m 、 n を自然数とすると、次の法則が成立ちます。

< 指数法則 >

$$a^m a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, (ab)^n = a^n b^n$$

例えば、 $(ab)^2 = a^2 b^2$

$$(-3)^2 = \{(-1) \times 3\}^2 = (-1)^2 \times 3^2 = 1 \times 9 = 9$$

あるいは $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

など、指数法則の意味を理解しましょう。